VII турнир математических боёв имени А.П. Савина

Детский оздоровительный лагерь «Клещёвка»
Ивановская область
26 июля - 2 августа 2001 года

Личная олимпиада

1. Нарисуйте шестиугольник, который можно разрезать на два треугольника, но нельзя разрезать на два четырёхугольника. (*С. Волчёнков*)

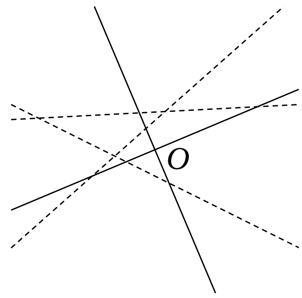
2. В следующих словах одинаковые буквы заменили одинаковыми цифрами, а разные – разными. Оказалось, что ДЕВЯНОСТО делится на 90, а ДЕВЯТКА делится на 9. Может ли СОТКА делиться на 9? (*И. Воронович, В. Каскевич*)

3. В каждой клетке доски 16×30 сидит по жуку. Могут ли жуки так перелететь на доску 15×32, в каждую клетку по жуку, чтобы жуки, бывшие соседями на исходной доске, оказались соседями и на новой доске? Соседями считаются жуки, сидящие в клетках с общей стороной. (*И. Жук*)

4. Можно ли натуральные числа от 1 до 2001 расставить по кругу так, чтобы каждое число делилось на разность своих соседей? (*С. Токарев*)

5. Натуральное число разрешено увеличить на любое целое число процентов от 1 до 100, если при этом получается натуральное число. Найдите наименьшее натуральное число, которое нельзя получить из числа 1 при помощи таких операций. (*А. Шаповалов*)

6. Двое играют в настольный теннис, а ещё шестеро желающих сыграть образуют очередь. Проигравший партию становится в конец очереди, а тот, чья очередь подошла, играет с победителем и так далее. Могут ли к некоторому моменту каждые двое сыграть между собой ровно один раз? (*С. Токарев*)



7. Оси Ox и Oy и прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ расположены так, как показано на рисунке. Укажите ось Ox и положительное направление на ней. (*С. Токарев*)

Первый тур

8. Изобразите на координатной плоскости множество точек (x, y), для которых
$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^3 = \frac{x^3+y^3}{2}.$$
(*С. Токарев*)

9. В клетках квадратной таблицы 3×3 расставлены числа 1, 2, …, 9 так, что сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна одному и тому же числу S. Найдите все возможные значения S. (*В. Замков*)

10. Докажите, что существуют такие различные 100-значные числа A и B, являющиеся точными кубами, что цифры десятичной записи числа A, записанные в обратном порядке, образуют число B. (*В. Замков*)

11. Может ли каждая из сторон выпуклого четырёхугольника быть пересечена биссектрисой некоторого его угла в точке, отличной от вершины? (*И. Григорьева*)

12. Рассмотрим всевозможные трёхчлены вида $ax^2 + bx + c$ с натуральными коэффициентами a, b, c, не превосходящими 100. Каких трёхчленов больше: имеющих хотя бы один действительный корень или не имеющих ни одного? (*С. Токарев*)

13. Сторона BC треугольника ABC разбита точками M и N на три равные части ($BM = MN = NC$). Точки K и L – середины сторон AB и AC соответственно. Прямая LM пересекает прямую AB в точке E, а прямая KN пересекает прямую AC в точке F. Докажите, что прямые BC и EF параллельны. (*Д. Калинин*)

14. Найдите все натуральные n, которые равны сумме некоторых трёх различных натуральных делителей числа $n - 1$. (*С. Токарев*)

15. В некоторой куче монет настоящих больше, чем фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково. Каждая фальшивая монета отличается по весу от настоящей, но фальшивые монеты могут иметь разную массу. Можно использовать чашечные весы, владелец которых после каждого взвешивания забирает себе в качестве арендной платы любую выбранную им монету из двух только что взвешенных. Докажите, что можно выделить хотя бы одну настоящую монету и оставить её себе. (*С. Токарев*)

Второй тур

16. Среди первых 60 натуральных чисел произвольно выбрано $30 + n$ различных чисел, где $1 \le n \le 30$. Докажите, что среди них найдётся $2n$ чисел, сумма которых равна $61n$. (*С. Тасмуратов*)

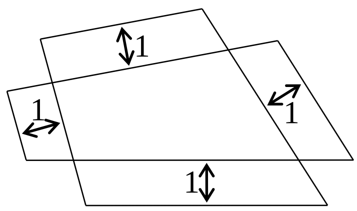
17. Решите в натуральных числах уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 2^t$. (*В. Произволов*)

18. Играя в домино, Мустафа, Табриз, Гамид и Эльмир взяли по семь доминошек с различной суммой очков. При этом сумма очков Мустафы и Табриза оказалась равной сумме очков Гамида и Эльмира, а разница очков Мустафы и Табриза составила $\frac{27}{7}$ разницы очков Гамида и Эльмира. Укажите какие-нибудь 12 доминошек, которые находятся на руках у Мустафы и Табриза. (*В. Мустафаев*)

19. Из бумаги склеили правильный тетраэдр. Разрежьте его на 12 одинаковых равносторонних треугольников. (*В. Произволов*)

20. Могут ли длины сторон a, b, c какого-нибудь треугольника удовлетворять неравенству $a^3 + b^3 + c^3 + 2abc \ge a^2(b + c) + b^2(c + a) + c^2(a + b)$? (*Д. Калинин*)

21. У крестообразно пересекающихся четырёхугольников соответствующие стороны параллельны и отстоят друг от друга на расстояние 1, как показано на рисунке. Докажите, что периметры четырёхугольников равны. (*В. Произволов*)



22. Какое наибольшее количество диагоналей клеток шахматной доски можно провести так, чтобы никакие две из них не имели общей точки? (*И. Акулич*)

23. Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$, в котором $AB = CD = EF$, $\angle A = \angle C = \angle E$ и $\angle B = \angle D = \angle F$. Докажите, что $BC = DE = FA$. (*В. Произволов*)

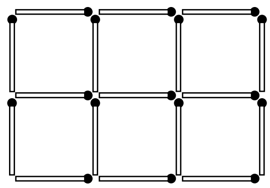
Третий тур

24. В Чебабурге имеют хождение монеты трёх видов: 1, 2 и 5 талеров. Масса каждой монеты одного из видов (в унциях) совпадает с её достоинством (в талерах), масса каждой монеты другого вида в полтора раза больше её достоинства, а масса каждой монеты третьего вида – в 2 раза больше. Имеется неограниченный запас монет каждого вида и чашечные весы без гирь. Какое наименьшее количество взвешиваний позволит наверняка определить массу монет каждого достоинства? (*И. Акулич*)

25. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса AM. Найдите углы треугольника, если известно, что $BM = AC$. (*Д. Калинин*)

26. Пусть M – конечное подмножество множества целых чисел, причём количество элементов в M кратно четырём, а между каждыми двумя числами, не принадлежащими M, расположено чётное количество элементов из M. Докажите, что M можно разбить на две части с равным числом элементов и равной суммой. (*С. Волчёнков*)

27. Клетчатый прямоугольник 2×3 сложен из 17 спичек, как показано на рисунке. Какие размеры может иметь клетчатый прямоугольник, составленный из 1000 таких же спичек? (*А. Шаповалов*)



28. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC отмечены точки C_1 и B_1 соответственно так, что $AB_1 = BC_1 = \frac{1}{3}AB$. Найдите угол AMC, где M – точка пересечения отрезков BB_1 и CC_1. (*Д. Калинин*)

29. Можно ли в кубе с ребром длины 2000 разместить семь точек так, чтобы расстояние между каждыми двумя из них было больше 2001? (*С. Волчёнков*)

30. Целые числа x, y, z таковы, что числа $xy + 1$, $yz + 1$ и $zx + 1$ являются точными квадратами. Докажите, что произведение xyz кратно 8. (*В. Сендеров*)

31. Решите систему уравнений $x(1+\sqrt{y}) = y(1+\sqrt{z}) = z(1+\sqrt{x}) = 2$. (*С. Дворянинов*)

Четвёртый тур

32. На турнир приехали 105 школьников. Среди каждых 15 из них есть школьники, знакомые между собой. Кроме того, каждые два школьника, у которых одинаковое количество знакомых среди участников турнира, не знакомы между собой, а те, у которых разное количество знакомых, – знакомы. Докажите, что среди участников турнира есть школьник, знакомый со всеми остальными. (*В. Каскевич*)

33. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке I. Докажите, что из отрезков IA_1, IB_1, IC_1 можно составить остроугольный треугольник. (*С. Токарев*)

34. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются пешки по следующим правилам. Выбираются любые четыре свободные клетки, центры которых являются вершинами квадрата со сторонами, параллельными сторонам доски, после чего на одну из этих клеток ставится пешка. Затем выбираются аналогичные четыре свободные клетки, на них снова ставится пешка и так далее. Какое наибольшее число пешек можно расставить на доске, соблюдая эти правила? (*И. Акулич*)

35. Палиндромом называется число, которое слева направо и справа налево читается одинаково. Докажите, что для любого простого $p > 150$ существует палиндром, делящийся на p и содержащий не более $0{,}23p$ цифр. (*И. Акулич*)

36. В трапеции $ABCD$ основание BC вдвое меньше AD. На прямую AB из точки D опустили перпендикуляр DH. Докажите, что если описанная окружность треугольника BCH касается стороны AD, то трапеция равнобедренная. (*Д. Калинин*)

37. Степану Фомичу 23 февраля 2001 года выдали премию 250 рублей. Он решил, используя эти деньги, заработать больше и купить жене подарок. Для этого, начиная со следующего дня, он стал ежедневно посещать казино, где каждый день либо выигрывал 20 рублей, либо проигрывал ровно половину имеющихся у него денег. Подсчитав свои доходы накануне 8 марта, Степан Фомич выяснил, что остался в выигрыше, но барыш оказался невелик – меньше трёх рублей. Сколько именно? (*И. Акулич*)

38. Найдите все пары простых чисел (p, q), при которых уравнение $x^4 + (q-2)x = p-4$ имеет хотя бы один целый корень. (*И. Воронович*)

39. В однокруговом хоккейном турнире за победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира все команды набрали разное число очков. Команда, занявшая последнее место, выиграла не менее 25% своих матчей, а команда, занявшая второе место, выиграла не более 40% своих матчей. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в этом турнире? (*И. Воронович*)

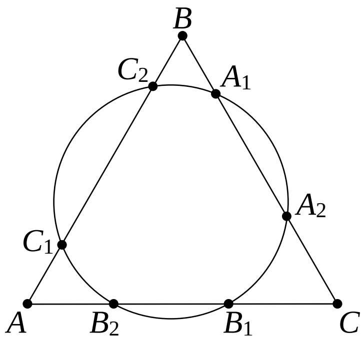
40. Какое наибольшее количество королей можно расставить на шахматной доске так, чтобы ровно половина из них не угрожала ни одному из остальных? (*И. Акулич*)

41. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты такие точки D и E (точка D лежит между A и E), что треугольник CDE равносторонний. Докажите, что $\angle MCE = 2\angle ACD$, где M – середина гипотенузы. (*Д. Калинин*)

Финал

42. На территории завода четыре асфальтовые дорожки длиной 10 м каждая образуют квадрат. В двух соседних вершинах квадрата стоят двое рабочих, держа на плечах десятиметровую трубу. Им необходимо, передвигаясь по дорожкам и не выпуская при этом трубы, поменяться местами. Внутри квадрата нет никаких сооружений, создающих помехи при переноске трубы. Из соображений безопасности запрещено двигаться со скоростью более 1 м/с. За какое наименьшее время рабочие могут справиться с заданием? (*И. Акулич*)

43. Окружность пересекает стороны равностороннего треугольника, как показано на рисунке. Докажите равенство $AC_1 + BA_1 + CB_1 = BC_2 + CA_2 + AB_2$. (*В. Произволов*)



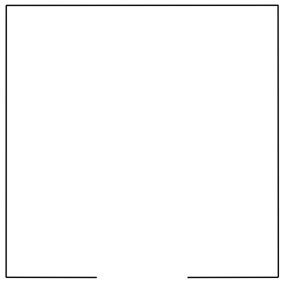
44. Докажите, что ни при каких целых a, b, c числа $\frac{a-b}{a-c} - \frac{b}{c}$, $\frac{b-c}{b-a} - \frac{c}{a}$ и $\frac{c-a}{c-b} - \frac{a}{b}$ не могут быть одновременно целыми. (*В. Каскевич*)

45. Разрежьте квадрат на шесть частей так, чтобы ими можно было в один слой оклеить поверхность некоторого куба. (*С. Токарев*)

46. Назовём натуральное число удобным, если его можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых, суммы цифр которых одинаковы. Докажите, что существует 1000000 последовательных удобных чисел. (*С. Токарев*)

47. Для некоторого $n > 1$ рассмотрим множество всех таблиц $n \times n$, заполненных числами $1, 2, \ldots, n^2$. Пусть A – подмножество рассматриваемых таблиц, которые можно получить перестановками строк и столбцов из таблицы, в которой в первой строке (столбце) стоят по порядку числа $1, 2, \ldots, n$, во второй строке (столбце) – числа $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $2n$ и так далее. Пусть B – подмножество рассматриваемых таблиц, из которых прибавлениями 1 ко всем числам любой строки или любого столбца можно получить таблицу с равными числами во всех клетках. Докажите, что $A = B$ тогда и только тогда, когда n простое. (*Д. Калинин*)

48. В середине одной из стен плоской квадратной комнаты размером 3×3 имеется проход ширины 1 (см. рисунок). Можно ли в эту комнату внести какой-нибудь стол площади более 4? (*С. Волчёнков*)



49. Существуют ли такие натуральные числа x, y, z, для которых $\text{НОК}(x, y, z) = \text{НОК}(x+1, y+1, z+1) = \text{НОК}(x+2, y+2, z+2)$? (*С. Токарев*)

Источник: http://tursavin.ru