VIII турнир математических боёв имени А.П. Савина

Дом отдыха «Волжский прибой»
Костромская область
26 июля - 2 августа 2002 года

Личная олимпиада

1. В записи $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6$ на местах, отмеченных звёздочками, стоят знаки: плюсы или минусы. За один ход Гриша выбирает два знака, разделённые цифрой, и меняет их на противоположные. Докажите, что он сможет сделать значение выражения кратным 7. (*Е. Барабанов, И. Воронович*)

2. Можно ли из бумажного прямоугольника 2×5 сложить двухслойную коробку размером $1 \times 1 \times 1$ без крышки? Прямоугольник разрешается сгибать и надрезать, но не разрезать на отдельные куски. (*С. Волчёнков*)

3. Равносторонний треугольник разрезан на равносторонние треугольники, периметр каждого из которых – целое число. Докажите, что периметр исходного треугольника – целое число. (*В. Произволов*)

4. Действительные числа a и b таковы, что $a + b^5 > ab^5 + 1$. Докажите неравенство $b + a^7 > ba^7 + 1$. (*Е. Барабанов, И. Воронович*)

5. На нижней горизонтали доски 2×25 расставлены фишки с номерами от 1 до 25 по порядку. За один ход можно переставить любую фишку на свободную соседнюю по стороне клетку. За какое наименьшее число ходов можно расставить все фишки на нижней горизонтали в обратном порядке? (*А. Шаповалов, М. Шаповалов*)

6. В треугольнике ABC угол A равен 15°, а угол B равен 60°. На сторонах AC и AB взяты такие точки M и N соответственно, что $AM = BM$ и $CN = MN$. Найдите угол CNM. (*Д. Калинин*)

7. Таня загадала натуральное число от 1 до 100. Саша пытается угадать число, которое загадано у Тани в данный момент. Если он угадывает, Таня сообщает ему об этом. В противном случае Таня меняет своё число: делит на Сашино, если делится нацело, иначе умножает на Сашино число и прибавляет единицу (не сообщая ему ничего). Докажите, что Саша сможет угадать число, загаданное Таней. (*А. Шаповалов*)

Командная олимпиада

8. У завхоза Васи было трое одинаковых чашечных весов. В одних потерялась часть деталей, и теперь они могут показывать что угодно. Любые весы помещаются на одну чашу других весов. За какое наименьшее количество взвешиваний можно определить неисправные весы? (*А. Чеботарёв, Т. Караваева, В. Гуровиц*)

9. Длины сторон AB и BC треугольника ABC равны 1 и 2 соответственно, а угол между ними равен 120°. Докажите, что медиана BM перпендикулярна стороне AB.

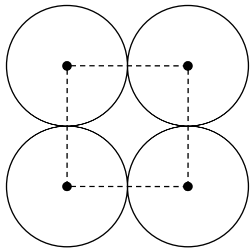
10. Двое начинающих играют в крестики-нолики на доске 10×10. Выигрывает тот, кто поставит три своих знака подряд по горизонтали, вертикали или диагонали. Может ли игра закончиться вничью? (*А. Чеботарёв*)

11. На параде кавалеры ордена Славы выстроились в виде каре 7×7. У каждого из них один, два или три ордена. Дотошные пионеры подсчитали число орденов в каждой шеренге, колонне и диагонали из семи человек. Докажите, что какие-то два из этих чисел совпадают. (*А. Шаповалов*)

12. На плоскости отметили восемь точек. Каждые две точки соединили отрезком и к каждому такому отрезку построили серединный перпендикуляр. Могло ли на каждом из этих перпендикуляров оказаться ровно по две отмеченные точки? (*В. Гуровиц*)

13. Найдите все такие тройки простых чисел, что произведение каждых двух из них при делении на третье даёт остаток 1. (*Б. Френкин*)

14. По четырём одинаковым окружностям с центрами в вершинах квадрата (см. рисунок) с постоянными равными скоростями бегают спортсмены, не переходя с окружности на окружность. Из каждых трёх спортсменов хотя бы двое иногда встречаются, то есть бегут по одной окружности в противоположных направлениях или бегут по разным окружностям, но одновременно оказываются в точке их касания. Каково наибольшее возможное число спортсменов? (*А. Чеботарёв*)



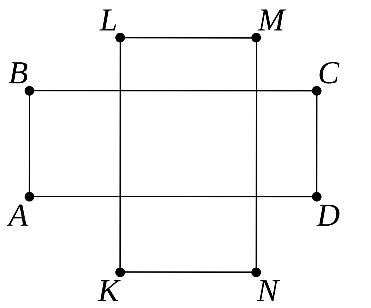
15. Решите систему уравнений $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{yz}}{y+z}, \\ y = \dfrac{\sqrt{zx}}{z+x}, \\ z = \dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}. \end{cases}$ (*А. Жуков*)

Первый тур

16. Целые числа x, y, z таковы, что $xy + yz + zx = 1$. Докажите, что число $(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2)$ является точным квадратом. (*В. Сендеров*)

17. Можно ли пятиконечную звёздочку разрезать на три выпуклых многоугольника? (*В. Произволов*)

18. Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ имеют соответственно параллельные стороны и расположены, как показано на рисунке. Докажите равенство площадей четырёхугольников $ALCN$ и $KBMD$. (*В. Произволов*)



19. Повар выложил на сковородку восемь котлет по кругу (по часовой стрелке), причём каждая следующая выкладываемая котлета была на 10 г тяжелее предыдущей. Когда котлеты поджарились, повар обнаружил, что забыл, с какой котлеты он начинал выкладывать. Как ему найти самую тяжёлую котлету за два взвешивания на чашечных весах без гирь? (*И. Николаева*)

20. Точку отразили симметрично относительно четырёх прямых. При этом её образы попали на некоторую окружность с центром O. Затем точку O отразили симметрично относительно тех же прямых. Докажите, что образы точки O принадлежат одной окружности. (*В. Произволов*)

21. Какое наибольшее число клеток шахматной доски можно отметить так, чтобы центры никаких четырёх отмеченных клеток не были вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски? (*А. Шаповалов*)

22. В однокруговом футбольном турнире участвовало n команд. Оказалось, что для всех k от 1 до $n - 1$ каждая команда в своём k-м матче забила k голов. Какое наименьшее число ничьих могло быть в этом турнире? (*А. Чеботарёв*)

23. Докажите, что для любого натурального $n > 10$ все натуральные числа от 1 до n можно разбить на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась произведению чисел в другой группе. (*А. Шаповалов*)

24. Доминошки из обычного комплекта домино выкладывают в цепь так, чтобы сумма очков на соприкасающихся половинках делилась на 8. Какое наибольшее число доминошек может быть в такой цепи? (*А. Шаповалов*)

25. Положительные числа a, b, c таковы, что $a < b < c$. Какая из сумм ближе к единице: $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$ или $\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$? (*А. Жуков*)

26. В треугольнике ABC точки M и N – середины сторон AC и BC соответственно, точка K – середина отрезка AM. Отрезки BM и NK пересекаются в точке O, причём $\angle BON = \angle OKM$. Докажите, что $AC = BM$. (*И. Воронович*)

27. Архипелаг состоит из семи островов вблизи материка. С каждого острова выходит три моста. Между каждыми двумя островами, а также между каждым островом и материком имеется не более одного моста. С острова Чунга на остров Чанга переехать нельзя. Сколько мостов связывает острова архипелага с материком? (*М. Ахмеджанова*)

28. В выпуклом 12-угольнике все углы кратны 30 градусам. Докажите, что все углы этого многоугольника равны. (*В. Произволов*)

Второй тур

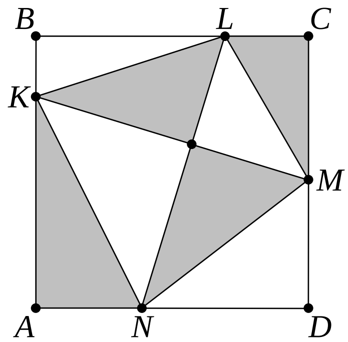
29. Дана замкнутая несамопересекающаяся ломаная с вершинами на рёбрах единичного куба. На каждой грани все звенья параллельны между собой.

а) Может ли в этой ломаной быть не менее 12 звеньев?

б) Может ли длина ломаной быть больше 100?

(*А. Шаповалов*)

30. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты такие точки K, L, M, N соответственно, что отрезки KM и LN перпендикулярны (см. рисунок). Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в окрашенные треугольники, равна сумме радиусов окружностей, вписанных в неокрашенные. (*В. Произволов*)



31. На каждой клетке прямоугольной доски 26×77 стоит по фишке. Докажите, что все фишки можно переставить на прямоугольную доску 22×91 (по одной на каждую клетку) так, чтобы на соседних по стороне клетках оказались только те фишки, которые ранее стояли на одной горизонтали или вертикали. (*А. Шаповалов*)

32. В некотором государстве 2002 города, и из каждого выходит пять дорог в другие города. Докажите, что города можно так разделить на три республики, что не более 1000 дорог будут внутриреспубликанскими. (*А. Шаповалов*)

33. Окружность разбита 31 точкой на равные дуги, причём 16 из этих точек красные. Докажите, что найдётся равнобедренный треугольник с красными вершинами. (*В. Произволов*)

34. Верно ли, что любое натуральное число можно представить как разность двух палиндромов? (*А. Шаповалов*)

35. Дно коробки 5×5 выложено квадратными плитками 1×1, на каждой из которых находится указатель, направленный вверх, вправо, вниз или влево. За один ход разрешается выбрать любые две плитки и повернуть одну из них на 90° по часовой стрелке, а другую – на 90° против часовой стрелки. Можно ли за несколько ходов придать всем указателям направление, противоположное первоначальному? (*Е. Барабанов, И. Воронович*)

36. Известно, что уравнения $x^2 + p = n^2y^2$ и $u^2 + p^2 = n^2v^2$, где p простое, а n натуральное, имеют решения в натуральных числах x, y, u, v. Чему равно n? (*В. Сендеров*)

37. В чемпионате мира по тыквондо 18 спортсменов состязались в разбивании тыквы одним ударом на максимальное число частей. Все участники показали различные результаты, причём у чемпиона получилось втрое больше частей, чем у занявшего десятое место, но меньше, чем у занявших девятое и десятое места вместе взятых. Какого результата добился чемпион, если общее количество частей у всех участников оказалось меньше 270? Неразбитая тыква считается одной частью. (*И. Акулич*)

38. В треугольнике ABC биссектриса AD и средняя линия MN пересекаются в точке K (точки M и N – середины сторон AB и BC соответственно). Докажите, что отрезки BK и AD перпендикулярны. (*В. Мустафаев*)

39. Можно ли вставить вместо многоточий числа (в десятичной записи) так, чтобы утверждение стало верным:

«В этом предложении цифра 0 встречается … раз(а);
цифры, не превышающие 1, – … раз(а);
цифры, не превышающие 2, – … раз(а);
цифры, не превышающие 3, – … раз(а);
цифры, не превышающие 4, – … раз(а);
цифры, не превышающие 5, – … раз(а);
цифры, не превышающие 6, – … раз(а);
цифры, не превышающие 7, – … раз(а);
цифры, не превышающие 8, – … раз(а);
цифры, не превышающие 9, – … раз(а)»? (*А. Шаповалов*)

40. Житель страны Ш. считается богатым, если его месячный доход выше зарплаты министра финансов, иначе – небогатым. Известно, что богатые женихи предпочитают небогатых невест. Докажите, что если министр финансов женат, а доходы у всех женихов и невест разные, то можно установить министру финансов такую зарплату, чтобы в стране стало поровну богатых женихов и небогатых невест. (*А. Шаповалов*)

41. Шулер Фукс кладёт даму, короля и туза лицом вниз. Моряк Лом должен не более чем за три попытки разложить их по старшинству слева направо. Перед каждой попыткой он может указать на любые две карты и узнать, какая из них старше. Если после этого он выкладывает карты правильно, Фукс об этом сообщает. Если нет, то перед следующей попыткой Фукс незаметно меняет местами две соседние карты (при этом он может выложить карты правильно, не сообщая об этом Лому). Есть ли у Лома способ справиться с заданием? (*А. Шаповалов*)

42. Докажите неравенство $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} > 5$, где a, b, c – длины сторон треугольника. (*А. Жуков*)

43. Докажите, что для любой натуральной степени двойки найдётся натуральный палиндром, который на неё делится. (*А. Шаповалов*)

Третий тур

44. Имеется 2002 точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждые две точки соединены отрезком. Можно ли покрасить каждый отрезок в один из шести цветов так, чтобы не оказалось ни одного треугольника с вершинами в данных точках, все стороны которого имеют одинаковые цвета? (*И. Акулич*)

45. Докажите, что для любого натурального $n > 1$ существует такой набор из $2n$ различных натуральных чисел, что произведение факториалов некоторых n из них равно произведению факториалов n остальных. (*В. Сендеров*)

46. В восьми банках сидят 80 пауков. Разрешается выбрать любые две банки, в которых суммарное число пауков чётно, и пересадить часть пауков из одной банки в другую так, чтобы их стало поровну. Верно ли, что, независимо от начального размещения, такими операциями можно добиться того, чтобы в банках оказалось поровну пауков?

(*В. Каскевич*)

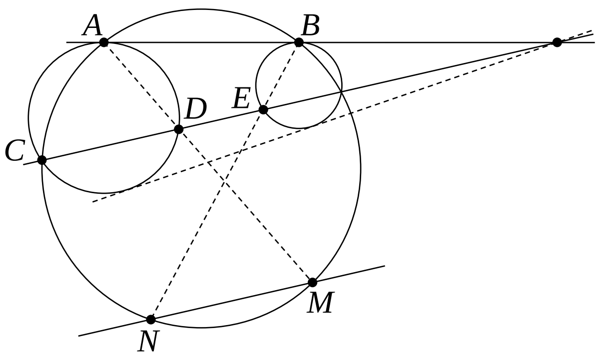
47. На плоскости изображены оси координат и график функции $y = \dfrac{1}{8x}$. Масштаб по обеим осям одинаков, но не указан на чертеже. Пользуясь только циркулем, постройте точку с координатами (1, 1). (*С. Токарев*)

48. Найдите все простые p, для которых среди дробей $\dfrac{1}{p^3+2}, \dfrac{2}{p^3+2}, \ldots, \dfrac{p^3+2}{p^3+2}$ имеется ровно $p + 2$ несократимых. (*И. Акулич*)

49. Клетки квадратной таблицы 11×11 раскрашены в белый и чёрный цвета. У каждой клетки соседей одного с ней цвета меньше, чем соседей противоположного цвета (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Каково наибольшее возможное количество белых клеток? (*Е. Барабанов*)

50. Одна из общих внешних касательных к двум окружностям касается их в точках A и B. Через точку пересечения касательных проведена секущая, пересекающая первую окружность в точках C и D, а вторую – в точке E (см. рисунок). Прямые AD и BE пересекают окружность, проведённую через точки A, B, C, в точках M и N. Докажите, что прямые CD и MN параллельны.

(*Д. Калинин*)



51. Окружность разбита 50 точками на 50 дуг длины 1, 2, …, 50. Известно, что длины каждых двух «противоположных» дуг различаются на 25. Докажите, что 50-угольник с вершинами в этих точках имеет хотя бы две параллельные стороны. (*В. Произволов*)

52. Было 1000 фигур – кругов и квадратов. Взяли половину кругов и седьмую часть квадратов и каждый из них разрезали на четыре равные части. В результате кругов стало вдвое больше, чем квадратов. Сколько именно? (*И. Акулич*)

53. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Вписанные окружности треугольников ABC и CDA касаются диагонали AC в точках K и L соответственно. Вписанные окружности треугольников BCD и DAB касаются диагонали BD в точках M и N соответственно. Докажите, что $KL = MN$. (*В. Мустафаев*)

54. Число a имеет b делителей, а число b имеет $\dfrac{a}{3}$ делителей. Сколько делителей у числа $a + b$? (*И. Акулич*)

55. В однокруговом хоккейном турнире за победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Если по итогам турнира две команды набирали одинаковое число очков, более высокое место присуждалось команде, у которой больше разница между количеством заброшенных и пропущенных шайб. В результате чемпион набрал 7 очков, серебряный призёр – 5, бронзовый – 3. Сколько очков набрала команда, занявшая последнее место? (*Е. Барабанов, И. Воронович*)

56. Внутри прямоугольника выбрана произвольная точка и соединена отрезками с вершинами прямоугольника. Докажите, что среди полученных четырёх отрезков найдутся три, из которых можно составить треугольник. (*Е. Барабанов, И. Воронович*)

57. Комплект для игры в лото содержит 90 бочонков, пронумерованных числами от 1 до 90. Бочонки каким-то образом разложены по нескольким мешкам (в каждом мешке больше одного бочонка). Назовём мешок хорошим, если номер одного из бочонков в нём равен произведению номеров остальных бочонков того же мешка. Каково наибольшее возможное количество хороших мешков? (*Е. Барабанов*)

58. Половина клеток квадратной таблицы 4×4 белые, половина – чёрные. Докажите, что можно вычеркнуть две строки и два столбца так, что в оставшейся части окажется поровну белых и чёрных клеток. (*Е. Барабанов, И. Воронович*)

Финал

59. Для любых положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 < \frac{(a+b+c)^3}{2}.$$

(*А. Жуков, А. Блинков*)

60. В ряд выложены в некотором порядке 50 карточек с различными натуральными числами от 1 до 50. Разрешается менять местами две карточки, если разность номеров их позиций равна наибольшему общему делителю чисел на этих карточках. Всегда ли такими операциями можно разложить карточки в порядке возрастания чисел на них? (*А. Чеботарёв*)

61. Натуральные числа от 1 до 22 записаны в такой последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_{22}$, что $|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{22} - a_1| = 242$. Чему равна сумма $|a_1 - a_{12}| + |a_2 - a_{13}| + \ldots + |a_{11} - a_{22}|$? (*В. Произволов*)

62. Назовём натуральное число n приятным, если в каждом выпуклом n-угольнике найдутся три угла, градусные меры которых численно равны сторонам некоторого треугольника. Найдите наименьшее приятное число. (*Е. Барабанов, И. Воронович*)

63. В треугольник ABC вписана окружность с центром I, которая касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Отрезки AI, BI, CI пересекают окружность в точках A_2, B_2, C_2. Докажите, что площадь треугольника $A_2B_2C_2$ равна половине площади шестиугольника $B_1A_2C_1B_2A_1C_2$. (*В. Произволов*)

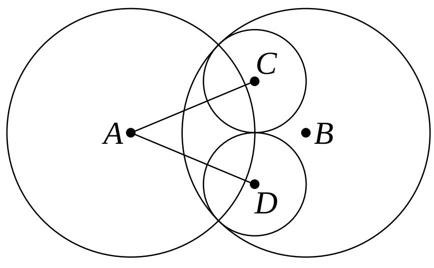
64. По окружности расставлены в некотором порядке натуральные числа от 1 до n. Для каждых двух соседних чисел вычисляется их произведение. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из этих произведений? (*И. Акулич*)

65. Два клетчатых квадрата 10×10 одинаково раскрашены в три цвета (каждая клетка – одним цветом), причём никакие две соседние по стороне клетки не покрашены в один цвет. Каждый квадрат разрезали произвольным образом на прямоугольники 1×2. Из частей одного квадрата составили новый квадрат 10×10. Всегда ли из частей второго квадрата можно составить квадрат, окрашенный таким же образом? (*В. Произволов*)

66. На доску 11×11 положили несколько квадратов 2×2 так, что каждый квадрат закрывает четыре клетки и каждые два квадрата пересекаются не более чем по одной клетке. Какое наибольшее число квадратов могли положить? (*Д. Калинин*)

67. Окружность касается сторон угла AOB в точках A и B. На меньшей дуге AB взята точка M. Расстояния от M до сторон угла равны a и b. Найдите расстояние от M до прямой AB.

68. Даны две равные пересекающиеся окружности с центрами A и B. Через точки их пересечения проведены ещё две равные окружности с центрами в точках C и D, касающиеся окружности с центром в точке B внутренним образом и друг друга – внешним образом (см. рисунок). Точка их касания лежит на окружности с центром в точке A. Найдите угол CAD. (*М. Леонович*)



69. Можно ли положить на плоский стол несколько монет (не обязательно одинаковых) без наложений так, чтобы каждая касалась шести других?

Источник: http://tursavin.ru