XVI турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2010 года

Личная олимпиада

1. Барон Мюнхгаузен утверждает, что два произведения: $1\frac{1}{10}\cdot 1\frac{1}{11}\cdot\ldots\cdot 1\frac{1}{99}$ и $1\frac{1}{100}\cdot 1\frac{1}{101}\cdot\ldots\cdot 1\frac{1}{999}$ – равные целые числа. Не ошибается ли он? (*Г. Гальперин*)

2. Отметьте на листе бумаги две красные, две жёлтые и две зелёные точки и соедините их отрезками так, чтобы получилось пять равносторонних треугольников с разноцветными вершинами. (*С. Дориченко*)

3. Компания Ролл Холл предлагает два вида комплексных билетов по 400 рублей: «1 час проката роликовых коньков + одна компьютерная игра + одна игра на бильярде + шесть жетонов для игральных автоматов» или «30 минут проката коньков + две компьютерные игры + десять жетонов для автоматов». Известно, что игра на бильярде дороже компьютерной. Что дешевле: взять коньки на 20 минут или купить три жетона для игральных автоматов? (*А. Блинков*)

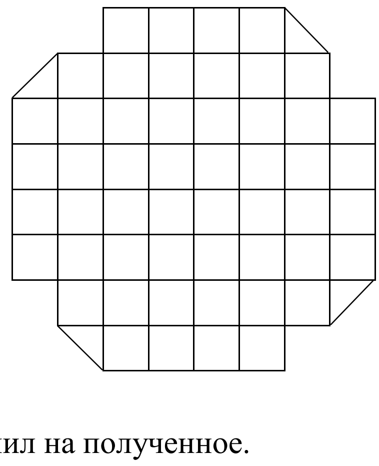
4. Известно, что $\text{КОЕ} - \text{ЧТО} = 857$. На сколько $\text{КТО} - \text{ТО}$ больше, чем $\text{КОЕ} - \text{КТО}$? (*А. Хачатурян*)

5. Есть 27 стандартных игральных кубиков, грани которых пронумерованы числами от 1 до 6. Из них сложили куб со втрое большим ребром, при этом сумма чисел на каждой паре соприкасающихся граней оказалась одна и та же. Чему она равна? (*А. Шаповалов*)

6. В летней школе мальчики и девочки живут в двухместных и трёхместных номерах (как мальчики, так и девочки занимают много и двухместных, и трёхместных номеров). Свободных мест нет. Посреди смены уехал один мальчик, живший в трёхместном номере, и приехала новая девочка. Какое наименьшее количество школьников придётся переселить, чтобы поселить эту девочку в двухместный номер? (*В. Гуровиц*)

7. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда врут, и хитрецы, которые чередуют правдивые и лживые высказывания (начать могут с любого). Однажды встретились три незнакомых между собой мудрых островитянина, и у них произошёл следующий разговор.

А: «Я не знаю, есть ли среди нас лжецы».
Б: «Я не знаю, есть ли среди нас рыцари».
В: «Я не знаю, есть ли среди нас хитрецы».
А: «Я даже не знаю, есть ли среди вас лжецы».
Б: «Я даже не знаю, есть ли среди вас рыцари».
В: «Я даже не знаю, есть ли среди вас хитрецы».
Кто из них кто? (*А. Хачатурян*)



8. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на 12 равных частей (не обязательно по линиям сетки). (*Ф. Романов*)

9. Буратино поменял местами первую и последнюю цифры некоторого трёхзначного числа и исходное число разделил на полученное. Результат оказался целым числом. Каким? (*А. Марачёв*)

10. В четырёхугольнике $ABCD$ стороны AD и BC параллельны, M – середина AB. Через точку M проведён перпендикуляр к CM, который пересекает AD в точке E. Докажите, что $\angle BCM = \angle ECM$. (*Д. Прокопенко, Ю. Блинков*)

11. Всех участников турнира два раза разбивали на команды: первый раз для игры в «Абаку», второй – в «Завалинку». Размеры команд в каждой игре не обязательно одинаковы, но в каждой команде есть хотя бы один участник. Оказалось, что каждый участник играл в «Завалинку» в не меньшей по численности команде, чем в «Абаку». Докажите, что в «Абаку» играло не меньше команд, чем в «Завалинку».

12. На стороне BC равностороннего треугольника ABC отмечена точка D. На лучах AB и AC выбраны точки E и F соответственно так, что $ED = FD = AD$. Точки E_1 на стороне AB и F_1 на стороне AC таковы, что $BE_1 = BE$ и $CF_1 = CF$. Докажите, что треугольник DE_1F_1 равносторонний. (*Д. Швецов*)

13. В некоторых клетках на поверхности кубика Рубика провели по одной диагонали. Муравей смог сделать замкнутый обход по всем диагоналям, ни в какой точке не побывав дважды. Каково наибольшее возможное число проведённых диагоналей? (*А. Шаповалов*)

14. В стране фараонов одинаковыми монетами любого достоинства можно набрать сумму ровно в один пиастр, причём для этого всегда нужно менее 50 монет. Барон Мюнхгаузен привёз оттуда шесть монет разных достоинств и утверждает, что они как раз составляют сумму в один пиастр. Могут ли слова барона быть правдой? (*А. Шаповалов*)

15. Две окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом. Прямая O_1O_2 пересекает окружности в точках A_1 и B_1 соответственно. Прямая A_2B_2 – общая внешняя касательная к окружностям (A_2 и B_2 – соответствующие точки касания). Найдите угол между прямыми A_1A_2 и B_1B_2. (*Д. Швецов*)

16. На шахматную доску, первоначально пустую, по одной выставляются ладьи. В момент выставления ладья должна побить чётное число свободных клеток (возможно, ни одной). Какое наибольшее количество ладей может быть выставлено? (*А. Шаповалов*)

17. Приведённые квадратные трёхчлены $f(x)$ и $f(x) + 2010$ с целыми коэффициентами имеют по два различных целых корня. Докажите, что оба они имеют хотя бы по одному нечётному корню. (*Г. Кузнецов*)

18. Дизайнер хочет развесить в комнате n светильников так, чтобы для каждого светильника нашлось ровно четыре, находящихся от него на одинаковом расстоянии. Докажите, что при любом $n \geq 6$ это возможно. (*Л. Федулкин*)

19. Двое играют на шахматной доске в следующую игру. Каждым ходом игрок выбирает некоторую свободную клетку и проводит в ней обе диагонали: одну – красным цветом, другую – синим. Запрещается проводить диагональ так, чтобы она имела общий конец с уже проведённой диагональю такого же цвета. Ходы делаются по очереди. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

20. Из последовательности 2010, 2009, …, 1 вычеркнули все точные квадраты, а из оставшихся чисел, не меняя порядка, сделали знакочередующуюся сумму $2010 - 2009 + 2008 - \ldots$ Чему равна эта сумма? (*А. Шаповалов*)

21. Через вершину C ромба $ABCD$ проведена прямая, пересекающая отрезки AB и BD в точках K и L соответственно. Описанная окружность треугольника AKL пересекает прямые AD и BD в точках M и N соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника CKM совпадает с ортоцентром треугольника CLN.
(*Ю. Блинков*)

22. Есть фальшивая монета и ещё девять одинаковых на вид монет. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь проверить, есть ли среди этих девяти монет хотя бы одна фальшивая? Все фальшивые монеты весят одинаково и тяжелее настоящих.
(*А. Шаповалов*)

23. Что больше: 2010 или $\sqrt{2010}+\sqrt[3]{2010}+\ldots+\sqrt[2010]{2010}$? (*Б. Френкин*)

24. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и CC_1. На лучах AB и CB выбраны точки A' и C' соответственно так, что $AA'=AA_1$ и $CC'=CC_1$. Докажите, что прямые $A'C'$ и AC параллельны. (*Д. Швецов*)

Командная олимпиада и нулевой тур

25. У Пети есть электронные часы, которые показывают часы и минуты, например 13:45. Ещё у Пети есть таймер, который ведёт обратный отсчёт времени до звонка, тоже показывая цифры часов и минут. Петя завёл таймер и обнаружил, что все оставшиеся 15 часов до звонка сумма цифр на часах плюс сумма цифр на таймере будет одна и та же. Найдите показания часов в момент звонка. (*А. Шаповалов*)

26. **а**) В шахматном турнире принимают участие 30 девочек и 70 мальчиков. В каждом туре все разбиваются на пары. В первых трёх турах 21 раз девочка играла против девочки. Сколько раз в этих турах мальчик играл против мальчика?

б) В школьном шахматном турнире $\frac{1}{3}$ игроков – девочки. В очередном туре участников разбили на пары. Оказалось, что в $\frac{1}{7}$ всех партий девочка играла против девочки. Найдите долю партий, в которых мальчик играл против мальчика. (*А. Шаповалов*)

27. **а**) В однокруговом шахматном турнире за победу начислялось 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0. По итогам турнира оказалось, что все участники набрали различное число очков. Известно, что восемь шахматистов не одержали ни одной победы. Каково наименьшее возможное количество участников турнира?

б) В однокруговом футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира оказалось, что все команды набрали различное число очков. Известно, что n команд не одержали ни одной победы. Каково наименьшее возможное количество команд? (*А. Блинков*)

28. Может ли произведение **а**) четырёх; **б**) шести последовательных натуральных чисел оканчиваться на 1000? (*Д. Шноль*)

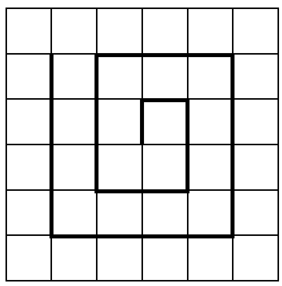
29. **а**) На столе лежит кучка из n спичек. Два игрока по очереди берут из кучки по одной, две или три спички, причём так, чтобы оставшееся количество спичек не было простым числом. Выигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

б) На столе лежит кучка из 1000 спичек. Два игрока по очереди берут из кучки по одной или две спички, причём так, чтобы оставшееся количество спичек не было простым числом. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*В. Гуровиц*)

30. Нарисуйте шестиугольник и проведите через две его вершины прямую, которая разбивает его на два пятиугольника. (*В. Гуровиц*)

31. За круглым столом сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего 2010 человек. Половина из них утверждает, что оба их соседа – рыцари, остальные утверждают, что оба соседа – лжецы. Кого за столом больше: рыцарей или лжецов? (*А. Заславский*)

32. Дан клетчатый квадрат $2n \times 2n$. Внутри квадрата, начиная из центра, по линиям сетки нарисована змейка наибольшей возможной длины (змейка не выходит на границу квадрата, пример такой змейки для $n=3$ показан на рисунке). Одна из диагоналей квадрата разбивает его на два треугольника. Верно ли, что суммы длин частей змейки в этих треугольниках одинаковы? (*А. Блинков*)



33. Можно ли разрезать равносторонний треугольник на один разносторонний, два равнобедренных (неравносторонних) и три равносторонних треугольника? (*Б. Френкин*)

34. На шахматной доске стоит несколько ладей. Каждые две клетки, на которых стоят ладьи, бьющие друг друга, соединены отрезком. По этим отрезкам можно пройти от каждой ладьи к любой другой единственным способом. Какое наибольшее количество ладей может стоять на доске? (*Б. Френкин*)

35. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка K, а на стороне BC – точки L и M так, что $AB = KB$, $AL = CL$, а прямые AL и KM параллельны. Докажите, что $BL = CM$. (*А. Марачёв*)

36. Пусть m и n – фиксированные натуральные числа, причём $m < n$. Для положительных чисел a и b выполняется равенство $a^m + b^m = a^n + b^n$. Какое наибольшее значение может принимать сумма $a + b$? (*Б. Френкин*)

37. Дан угол с вершиной A. На его сторонах выбираются точки B и C так, что $AB + AC = 1$. Докажите, что, независимо от выбора точек B и C, описанная окружность треугольника ABC проходит через фиксированную точку, отличную от A. (*А. Хачатурян*)

38. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Окружность, проходящая через точки C и D, касается отрезка AB в точке M_{ab}. Аналогично определяются точки M_{bc}, M_{cd}, M_{da}. Докажите, что прямые $M_{ab}M_{cd}$ и $M_{bc}M_{da}$ перпендикулярны. (*М. Волчкевич, Д. Швецов*)

39. На плоскости дано n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что найдутся такие три из них A, B, C, что $\angle ABC \le \dfrac{180^\circ}{n}$.

Первый тур

40. 2010 шаров раскрасили в семь цветов радуги. На каждом шаре написали общее количество шаров такого же цвета, как и этот. Чему может быть равна сумма чисел, обратных написанным? (*Г. Гальперин*)

41. Борис и Алиса играют в следующую игру. Сначала Борис берёт некоторое нечётное количество карточек и пишет на них различные натуральные числа, не превосходящие **а**) 20; **б**) 1000. Затем Алиса раскладывает эти карточки в ряд. После этого они по очереди, начиная с Бориса, берут по одной карточке с любого из краёв ряда. Выигрывает тот, чья итоговая сумма чисел на карточках окажется больше. При каком наименьшем количестве карточек Алиса может выиграть, как бы ни играл Борис? (*Г. Кузнецов*)

42. **а**) В десяти кошельках лежали монеты. В каждом кошельке достоинства любых двух монет отличались не более чем на 1 берендейку. Монеты перемешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про монеты заранее ничего не знает. Он вынимает по одной монете из мешка, смотрит на неё, кладёт в одну из 19 имеющихся коробок и потом эту монету уже не перекладывает. Докажите, что Саша может действовать так, чтобы достоинства любых двух монет в каждой коробке отличались не более чем на 1 берендейку.

б) В десяти кошельках лежали монеты. В каждом кошельке массы любых двух монет отличались не более чем на 1 г (массы монет не обязательно целые). Монеты перемешали и положили в непрозрачный мешок. Саша про массы монет заранее ничего не знает. Он вынимает по одной монете из мешка, взвешивает, кладёт в одну из 20 имеющихся коробок и потом эту монету уже не перекладывает. Докажите, что Саша может действовать так, чтобы массы любых двух монет в каждой коробке отличались не более чем на 1 г.

в) Докажите, что в условиях пункта б) Саша сможет разложить монеты в 19 коробок так, чтобы массы любых двух монет в каждой коробке отличались не более чем на 1 г. (*А. Шаповалов*)

43. В городе Кошкособачинске шесть прямых улиц. На трёх улицах живут кошки, на трёх других – собаки. Если через перекрёсток проходят как кошачья, так и собачья улицы, на нём расположен травмпункт. Если же только кошачьи или только собачьи, то ночной клуб. При этом клубов столько же, сколько травмпунктов. Сколько травмпунктов может быть в Кошкособачинске, если **а**) через каждый перекрёсток может проходить две или более улицы; **б**) через каждый перекрёсток проходит ровно две улицы? (*А. Шаповалов*)

44. В социальной сети год назад 30% пользователей составляли дети, 50% – взрослые и 20% – пенсионеры. За год количество детей увеличилось на 100%, взрослых – на 80%, а пенсионеров – на 150%. Сколько теперь процентов пользователей составляют дети, взрослые и пенсионеры? (*В. Гуровиц*)

45. Из одинаковых квадратных плиток Гриша построил мост в виде прямоугольника 3×25. Ураганом выломало некоторые плитки, но каждые две плитки моста по-прежнему соединены цепочкой из уцелевших плиток. Кроме того, никакие две соседние по стороне плитки не выломаны. Какое наименьшее число плиток могло уцелеть после урагана?

46. Коля в тетради по астрономии записал верное равенство, а хулиган Вася заляпал две цифры чернилами. Получилось вот что:
$15^{37} = 32{*}6246613611855449562426656484603881835 9{*}75$. Какие цифры заляпал Вася?

47. У двух восьмизначных чисел произведения цифр положительны и равны. В каждом из чисел все цифры различны. Докажите, что у этих чисел равны и суммы цифр.
(*А. Шаповалов*)

48. Рёбра деревянного куба раскрасили в четыре цвета: красный, синий, жёлтый, зелёный – так, что на каждой грани встречаются все цвета. Докажите, что можно так поставить куб, чтобы на верхней грани цвета по часовой стрелке шли в порядке красный, синий, жёлтый, зелёный. (*А. Шаповалов*)

49. Произведение любых четырёх различных делителей числа кратно самому числу. Сколько делителей может иметь такое число? (*Д. Шноль*)

50. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается катетов BC, AC и гипотенузы AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. На отрезках AB_1 и BA_1 во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники APB_1 и BQA_1. Найдите угол PC_1Q.
(*Д. Швецов*)

51. Клетки бесконечного листа клетчатой бумаги покрашены в красный и синий цвета так, что каждый прямоугольник 2×3 содержит ровно две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник 2009×2011?

52. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон BC, CA, AB в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Пусть P и Q – точки, симметричные A_1 относительно вершин B и C. Докажите, что точки P, C_1, B_1, Q лежат на одной окружности. (*Д. Швецов*)

53. В компании $n > 2$ человек. Сейчас никто из них ни с кем не находится в ссоре. В компании проводятся собрания. На собрание приходит несколько человек (но не все), и те, кто до собрания не был в ссоре, на собрании ссорятся, а кто был в ссоре – мирятся. За какое наименьшее число собраний может сложиться ситуация, когда все друг с другом будут находиться в ссоре?

54. **а**) Можно ли какой-нибудь треугольник разрезать на 26 равных частей?

б) При каком наименьшем n найдётся n-угольник, который можно разрезать на 13 равных частей? (*А. Заславский*)

в) Существуют ли три не подобных между собой треугольника, каждый из которых можно разрезать на 26 равных треугольников? (*А. Заславский, Б. Френкин*)

55. Числа x_1 и x_2 являются корнями уравнения $x^2 + ax + bc = 0$, а числа x_2 и x_3 – корнями уравнения $x^2 + bx + ca = 0$. Составьте квадратное уравнение, корнями которого являются числа x_1 и x_3.

56. Внутри остроугольного треугольника ABC выбрана точка N, а на сторонах AB и BC – точки P и Q соответственно. Отрезки NA, NP и NQ делят треугольник ABC на треугольник и два четырёхугольника. Оказалось, что эти четырёхугольники – две равные трапеции. Найдите отношение их оснований. (*А. Хачатурян*)

57. Есть клетчатый бильярдный стол размером 99×101. По углам стола расположены лузы. Можно ли запустить шар таким образом, чтобы на своём пути он прошёл по всем вершинам всех квадратиков сукна, расположенных внутри стола? (*А. Юрков*)

58. Последовательность задана условиями $a_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n^2 + a_n$ при всех $n \geq 1$. Найдите целую часть суммы $\dfrac{1}{a_1+1} + \dfrac{1}{a_2+1} + \ldots + \dfrac{1}{a_{100}+1}$.

Второй тур

59. **а**) Дано десять бумажных прямоугольников. Вася может разрезать не более одного из них на два меньших прямоугольника. После этого он делит прямоугольники на две группы. Всегда ли он может добиться, чтобы суммы периметров в группах были одинаковы?

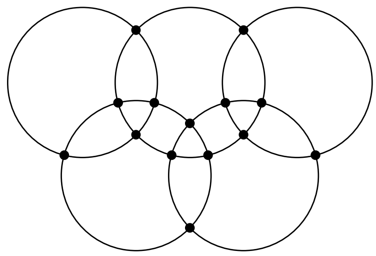
б) Та же задача для десяти треугольников, из которых Вася может разрезать не более одного на два меньших треугольника. (*А. Шаповалов*)

60. **а**) Докажите, что сумма всех восьмизначных палиндромов делится на 9.

б) Докажите, что сумма всех шестизначных палиндромов, в записи которых нет нулей, делится на 13. (*А. Шаповалов*)

61. Есть кубики двух размеров. Ребро каждого большого кубика в 2 раза больше ребра маленького кубика. Можно ли из равного количества кубиков обоих видов сложить куб? (*Д. Шноль*)

62. Пять олимпийских колец пересекаются в 14 точках (см. рисунок). В каждой точке лежит по монете. Монеты, лежащие на одном из колец, фальшивые, остальные – настоящие. Каждая фальшивая монета весит 9 г, каждая настоящая – 10 г. За какое наименьшее число взвешиваний на весах, показывающих массу, можно найти все фальшивые монеты?



63. **а**) Имеется набор из 12 гирек, массы которых равны 1 г, 2 г, …, 12 г. Разложите их на несколько кучек так, чтобы в каждой кучке масса одной из гирек равнялась сумме масс остальных.

б) У Саши есть 27 кусков сыра, массы которых равны 100 г, 200 г, …, 2700 г. Он хочет разложить весь сыр на кучки так, чтобы в каждой из них был кусок, весящий столько же, сколько и все остальные куски в этой кучке вместе. Сколько кучек у него может получиться? (*А. Грибалко*)

64. В часах есть календарь, который показывает дату и рассчитан на 31 день. Если в месяце меньше 31 дня, то 1-го числа следующего месяца хозяин часов вручную переводит дату. Какое наименьшее количество месяцев могло пройти после последнего перевода часов, если 1-го числа они показывают 23-е? (*Л. Федулкин*)

65. Коля и Толя по очереди закрашивают по две клетки на полоске 1×2010. Коля хочет, чтобы расстояния между двумя закрашенными им за один ход клетками не повторялись. Сможет ли Толя ему помешать? (*Н. Чернятьев*)

66. На праздновании двадцатилетия школьного выпуска Катя рассказывала:

– Ещё студенткой я вышла замуж, и теперь у меня четверо детей.

– И какого возраста?

– Произведение возрастов старших в 55 раз больше произведения возрастов младших. А в школу из них ходит только Ваня.

Сколько лет Катиным детям?

67. Группа из 54 туристов в каждой поездке занимает плацкартный вагон: 36 купейных мест и 18 боковых. За время поездок каждый побывал хотя бы раз на боковом месте (в течение одной поездки места не меняются). Турист Петя всегда ездит на боковом месте. Докажите, что хотя бы $\frac{2}{3}$ туристов побывали на купейных местах не менее чем по три раза. (*Б. Френкин*)

68. В треугольнике ABC угол A равен 60°. Вписанная окружность треугольника с центром в точке I касается сторон AB и AC в точках K и L соответственно. Отрезки BI и CI пересекают вписанную окружность в точках M и N соответственно.

а) Докажите, что отрезки KL и MN равны.

б) Докажите, что прямые KM и LN параллельны.

69. В футбольном турнире одной из европейских стран участвовало $2n$ команд. Каждые две команды сыграли по два матча. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира в статье еженедельника «Футбол» было написано, что первые две команды набрали в сумме половину очков, набранных всеми остальными командами. При каком наибольшем n сказанное в статье могло быть правдой? (*А. Блинков*)

70. Назовём маршрут ладьи на бесконечной клетчатой плоскости правильным, если он имеет начало, не имеет конца и проходит через каждую клетку ровно по одному разу (ладья каждым ходом перемещается в соседнюю по стороне клетку). Можно ли во всех клетках плоскости расставить натуральные числа так, чтобы каждое число встречалось ровно один раз и на некотором правильном маршруте числа только возрастали, а на другом правильном маршруте всё время чередовалось возрастание и убывание чисел? (*Б. Френкин*)

71. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается катетов BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Вневписанная окружность треугольника касается стороны BC в точке A_2, другая вневписанная окружность касается стороны AC в точке B_2. Точки P и Q – середины отрезков A_1B_2 и A_2B_1 соответственно. Чему равен угол PCQ? (*Д. Швецов*)

72. а) Лёша говорит, что придумал квадратный трёхчлен, имеющий два целых корня. Потом он прибавил ко второму коэффициенту 2, а к свободному члену – 6 и снова получил квадратный трёхчлен с целыми корнями. С результатом он сделал то же самое и так делал 2010 раз, и всякий раз у него получался квадратный трёхчлен с целыми корнями. Могут ли слова Лёши быть правдой? (*А. Марачёв*)

б) Есть две бесконечные арифметические прогрессии $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$. Известно, что при всех n уравнение $x^2 + a_nx + b_n = 0$ имеет два целых корня. Докажите, что у всех этих уравнений есть общий корень. (*А. Марачёв, А. Заславский*)

73. Окружность, проходящая через вершины B и C равнобедренного прямоугольного треугольника ABC, пересекает прямые AB и AC в точках E и F соответственно. Точка M – середина гипотенузы AB, а точка N – середина отрезка CF. Докажите, что $NE = NM$. (*Д. Швецов*)

74. В школе учится столько же мальчиков, сколько и девочек. Ни в каком классе не учится больше, чем полшколы. Все ученики школы пришли на дискотеку. Диджей объявил белый танец. Докажите, что каждая девочка сможет пригласить мальчика из другого класса.

75. На прямой, содержащей биссектрису угла C треугольника ABC, взяли такие точки P и Q, что $CP^2 = CQ^2 = CA \cdot CB$. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$. (*А. Заславский*)

76. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – n последовательных точек одной прямой, $A_1A_n = 1$, точки могут совпадать. Для данного числа l, где $0 < l \le 1$, найдите наибольшее возможное количество пар точек, расстояния между которыми не меньше l.

77. Целые числа a, b, c, d удовлетворяют условию $a^3 + ba^2 + ca + d = 0$. Докажите, что число $c^2 - 4ad - 4bd$ является точным квадратом. (*А. Хачатурян*)

Третий тур

78. Борис и Алиса по очереди вставляют буквы слова ЗАГАДКА (буквы можно брать в любом порядке) на пустые места в следующем примере: $\_\cdot\_\cdot\_+\_=\_\cdot\_\cdot\_$. Борис начинает и стремится к тому, чтобы полученный числовой ребус не имел решений. Сможет ли Алиса ему помешать? (*Г. Кузнецов*)

79. **а**) Пете дали натуральное число N. Он выписал по одному разу каждую цифру, которая встречается в этом числе, а около каждой цифры – сколько раз она встречается в его записи. Оказалось, что выписаны все однозначные числа и только они, причём все по одному разу. Найдите наименьшее N, для которого такое возможно.

б) Та же задача, но среди выписанных чисел некоторые могут встречаться несколько раз.

80. Каждая из 33 голов дракона за ночь успела один раз заснуть, а потом проснуться. Назовём дружными такие две головы, которые хоть какое-то время спали одновременно. Известно, что среди каждых трёх голов дракона найдутся две дружные. Иван-царевич умеет одним махом отрубать дракону все спящие головы, причём остальные головы на это никак не реагируют. Докажите, что у Ивана-царевича в эту ночь была возможность отрубить дракону все головы двумя взмахами меча.

81. **а**) Мальвина учит Буратино считать. Она называет какое-нибудь натуральное число. Буратино должен назвать число в полтора раза большее, если такое число целое. А если оно не целое, то округлить до целого с избытком (например, из числа 5 получается 8). Затем Буратино должен проделать такую же операцию с полученным числом и так далее. Пока у Буратино не получится чётное число, пудель Артемон не пустит его гулять. Может ли Мальвина заставить Буратино решить до прогулки шесть примеров на умножение?

б) В условиях пункта а) может ли Мальвина назвать нечётное трёхзначное число и заставить Буратино решить до прогулки девять примеров на умножение?

82. Можно ли разрезать квадрат на 2011 прямоугольников и разделить их на две группы так, чтобы суммы периметров прямоугольников из первой и второй групп оказались равными?

83. Петя выставляет на шахматную доску, первоначально пустую, по одной ладьи, чередуя белые с чёрными. Если выставленная ладья побила одну или несколько ладей другого цвета, одну из побитых надо снять с доски. Какое наибольшее количество клеток может заполнить Петя? (*А. Шаповалов*)

84. По кругу сидят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего 2010 человек. Каждый заявил, что его соседи – рыцарь и лжец, но два рыцаря при этом ошиблись. Сколько всего может быть лжецов?

85. Три поросёнка, спасаясь от волка, побежали из развеянного по ветру домика в каменный. Первым выбежал Ниф-Ниф, за ним – Нуф-Нуф, последним – Наф-Наф. На бегу Ниф-Ниф пять раз менялся местами с кем-то из братьев. Известно, что Нуф-Нуф вбежал в каменный домик раньше Ниф-Нифа. В каком порядке финишировали поросята?

86. В вершинах квадрата записано по натуральному числу. Для каждой стороны нашли произведение чисел в её концах. Сумма этих произведений равна 91. Найдите сумму чисел в вершинах. (*А. Шаповалов*)

87. В каждой клетке квадрата 10×10 провели по диагонали. Докажите, что можно покрасить каждый из 200 получившихся треугольников в один из трёх цветов так, чтобы треугольники одинакового цвета не граничили по стороне.

88. В однокруговом хоккейном турнире участвовало чётное количество команд. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира команда, занявшая первое место, набрала столько же очков, сколько занявшая второе место, третья – столько же очков, сколько четвёртая, и так далее. В каждом случае выше в таблице поставили команду, имевшую больше побед. Если бы использовали другой дополнительный показатель – результат личной встречи, – то вторая команда оказалась бы выше первой, четвёртая выше третьей и так далее. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире? (*А. Блинков*)

89. Вася вырезал из бумаги многоугольник, но не хочет показывать его Пете. А тому очень интересно, сколько же у многоугольника углов. Вот он и терзает Васю вопросами вида «А можно ли разрезать твой многоугольник прямолинейным разрезом на m-угольник и n-угольник?» Всегда ли с помощью нескольких таких вопросов Петя сможет точно выяснить, сколько углов в Васином многоугольнике? (*В. Гуровиц*)

90. Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а сторон BC и DA – в точке Q. Биссектрисы углов ABC и BCD пересекаются в точке M. Биссектриса угла AQB пересекает прямые BM и CM в точках E и F соответственно. Докажите, что прямые AE, DF и PM пересекаются в одной точке.

91. На шахматной доске стоит несколько ладей и слонов. Оказалось, что каждая фигура побита ровно три раза (фигуры, между которыми стоит какая-нибудь фигура, друг друга не бьют). Может ли фигур быть больше, чем свободных клеток? (*А. Шаповалов*)

92. Сиденья карусели раскрашены в n цветов так, что сидений всех цветов поровну и сиденья каждых двух цветов расположены рядом одно и то же число раз. При каком наименьшем количестве сидений возможна такая раскраска? (*А. Заславский*)

93. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отметили середину M стороны AD. Оказалось, что $\angle BMC = 90°$ и $\angle BAM = \angle BCM$. Докажите, что продолжения сторон AB и CD пересекаются под прямым углом.

94. Решите в целых числах уравнение $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$.

95. На клетчатой плоскости построен параллелограмм с вершинами в узлах сетки, периметр которого равен 12. Какие целые значения может принимать его площадь? (*А. Блинков*)

96. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство
$$\frac{a-b}{b+c} + \frac{b-c}{c+d} + \frac{c-d}{d+a} + \frac{d-a}{a+b} \geq 0.$$

97. Коля написал на бумажке n натуральных чисел, сумма которых не делится на n. Диме разрешено одно из чисел умножить на n, другое – на $n-1$, …, предпоследнее – на 2 и одно оставить неизменным, а потом сложить все полученные произведения. Всегда ли Дима может сделать сумму, кратную n, если n является произведением двух простых чисел? (*Д. Калинин, Н. Чернятьев*)

98. На высоте AH остроугольного треугольника ABC выбрана точка M. На сторонах AB и AC отмечены точки P и Q соответственно так, что $\angle CMP = \angle BMQ = 90°$. Докажите, что прямые PQ и BC параллельны. (*М. Волчкевич*)

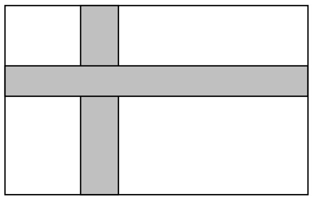
99. Последовательность a_0, a_1, a_2, … такова, что $a_{m+n} + a_{m-n} = \dfrac{a_{2m} + a_{2n}}{2}$ для всех целых неотрицательных m и n, где $m \geq n$. Найдите a_{1000}, если известно, что $a_1 = 1$. (*О. Мусин*)

Финал

100. В клетках таблицы 3×3 написано девять различных натуральных чисел. Сумма чисел в каждой строке делится на 3, а в каждом столбце – на 7. Найдите наименьшую возможную сумму всех чисел таблицы.

101. В трёхзначном числе зачеркнули цифру в разряде сотен, затем полученное двузначное число умножили на 7 и получили исходное трёхзначное число. Какое это число?

102. Крош и Ёжик сделали флаг. Крош достал прямоугольный кусок белой ткани, а Ёжик нашил на него две синие ленты, как показано на рисунке. Размеры вертикальной полосы 50×10 см, а горизонтальной – 8×80 см. Чему равна площадь белой части флага?



103. **а**) На витрине в ряд лежат десять одинаковых на вид кусков сыра в порядке убывания масс. Самый вкусный кусок ровно вдвое легче всех остальных, вместе взятых. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно его найти?

б) Та же задача, но куски сыра лежат в невозрастающем порядке, то есть среди них могут быть равные по массе. (*А. Шаповалов*)

104. Робин-Бобин Барабек ограбил 40 человек. У каждого он отбирал по шесть пончиков, затем делил все имеющиеся к этому моменту пончики на равные кучки и одну из кучек съедал. Ограбив последнего, он разделил пончики на шесть кучек, а в съеденной им кучке оказалось шесть пончиков. Сколько всего пончиков съел Робин, если вначале пончиков у него не было? (*А. Шаповалов*)

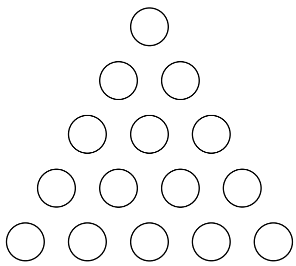
105. Существует ли шестиугольник, который одним прямолинейным разрезом можно разрезать на два треугольника, но нельзя разрезать на два четырёхугольника?

(*И. Раскина*)

106. **а**) У ёжика и лисы есть кусочек сыра массой 100 г. Они играют в шахматы. Если выигрывает ёжик, то он съедает 4 г, а если выигрывает лиса, то она съедает четверть оставшегося сыра. После нескольких партий остался кусочек массой 63 г. Сколько раз мог выиграть ёжик? (*Т. Голенищева-Кутузова*)

б) У ёжика и лисы есть кусочек сыра массой в целое число граммов. Они играют в шахматы. Если выигрывает ёжик, то он съедает 4 г, а если выигрывает лиса, то она съедает четверть оставшегося сыра. После нескольких партий ёжик и лиса съели поровну сыра и одержали поровну побед. Сколько граммов сыра осталось? (*А. Хачатурян*)

107. Какое наименьшее количество монет, показанных на рисунке, надо переложить, чтобы получился такой же треугольник, но вершиной вниз?



108. Можно ли расставить в записи $\dfrac{1*2*\ldots*100}{1*2*\ldots*100}$ вместо звёздочек знаки умножения и деления так, чтобы полученное выражение равнялось $\dfrac{1}{10}$?

109. **а**) На рёбрах куба расставили 12 чисел, затем для каждой вершины вычислили сумму чисел на выходящих из неё рёбрах. Могли ли ровно семь из этих сумм оказаться одинаковыми?

б) На рёбрах куба расставили 12 последовательных натуральных чисел, затем для каждой вершины вычислили сумму чисел на выходящих из неё рёбрах. Могли ли все суммы оказаться одинаковыми? (*А. Шаповалов*)

110. Петя разбил клетчатый квадрат **а**) 7×7; **б**) 1001×1001 на прямоугольники по границам клеток и раскрасил прямоугольники в три цвета так, чтобы прямоугольники одного цвета не соприкасались даже углами. Какое наибольшее число прямоугольников могло получиться у Пети? (*А. Шаповалов*)

111. Саша, Маша и Глаша ездили на велосипедах по круговому треку. Они стартовали одновременно из одной точки, причём Саша и Маша поехали в одну сторону, а Глаша – в противоположную. Через 400 секунд Глаша встретила Сашу в 12-й раз, а Машу – в 10-й. Какова длина трека, если скорость Маши равна 14 км/ч, а скорость Глаши составляет 0,8 от скорости Саши?

112. **а**) На боковой стороне BC и основании AC равнобедренного треугольника ABC отметили точки M и K соответственно. Оказалось, что $BM = CK$ и $\angle BAM = \angle CBK = 1°$. Найдите углы треугольника ABC.

б) Точка M – середина боковой стороны BC тупоугольного равнобедренного треугольника ABC. На основании AC отметили точку K так, что $BM = CK$. Докажите, что $\angle BAM \neq \angle CBK$.

113. Назовём число красивым, если сумма всех его делителей является простым числом. Может ли произведение двух различных красивых чисел быть красивым?

114. На доске написаны числа 1, 2, …, 1001. Два игрока по очереди стирают по одному числу, пока на доске не останется два числа. Если одно из них делится на второе, выигрывает первый, иначе – второй. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

115. Среди $2n$ человек n болеет за «Спартак» и n – за «Динамо». Разрешается спросить у любых двоих, болеют ли они за разные команды, и они честно ответят «Да» или «Нет». Требуется посадить болельщиков в два автобуса так, чтобы в каждом были болельщики только одной команды. За какое наименьшее количество вопросов это наверняка можно сделать? (*И. Раскина*)

116. Имеется бесконечная последовательность T_1, T_2, … приведённых квадратных трёхчленов. Два младших коэффициента каждого трёхчлена равны корням следующего. При этом $T_1 = x^2 + bx + c$ и $T_{2010} = x^2 + cx + b$, где b и c – целые ненулевые числа. Найдите возможные значения b и c. (*Б. Френкин*)

117. Клетки поверхности куба $6 \times 6 \times 6$ раскрашены в белый и чёрный цвета. Известно, что как ни приложить к его поверхности прямоугольник 1×3 по границам клеток (возможно, перегнув через ребро), количество белых клеток, покрытых прямоугольником, будет одним и тем же. Сколько существует таких раскрасок?

118. В треугольнике ABC один из углов равен 60°, точки I и O – центры вписанной и описанной окружностей, H – ортоцентр. Верно ли, что среди шести точек A, B, C, I, O, H найдутся пять, лежащих на одной окружности? (*Д. Шноль*)

119. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a < b < c$, $b + a$ делится на $b - a$, а $c + b$ делится на $c - b$. Число a записывается 2009 цифрами, а число b – 2010 цифрами. Сколько цифр в числе c? (*Б. Френкин*)

120. Параллелограмм разбит на треугольники. Докажите, что один из них можно накрыть всеми остальными вместе. (*А. Шаповалов*)

121. Точный квадрат содержит более 1000000 цифр. Каково наименьшее возможное количество чётных цифр? (*А. Шаповалов*)

Источник: http://tursavin.ru