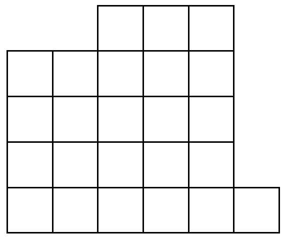
XXV турнир математических боёв имени А.П. Савина

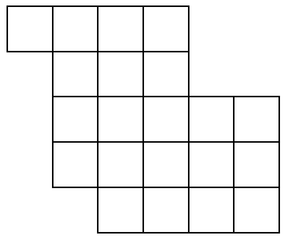
База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2019 года

Личная олимпиада

1. **а**) В записи 3 4 5 6 расставьте между соседними цифрами знаки сложения, умножения и скобки двумя способами так, чтобы значения полученных выражений были одинаковыми. (*А. Грибалко*)

б) В записи −2 −3 −4 −4 расставьте между соседними числами знаки сложения, умножения и скобки двумя способами так, чтобы значения полученных выражений были одинаковыми. (*А. Сгибнев, Д. Шноль*)





2. **а**) Разрежьте фигуру (см. рисунок) по линиям сетки на четыре равные части.

б) Разрежьте фигуру (см. рисунок) по линиям сетки на три равные части. (*Н. Чернятьев*)

3. На чемпионате мира по футболу за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Четыре команды, игравшие в групповом однокруговом турнире, набрали в сумме 13 очков. Сколько очков набрала каждая команда? (*И. Высоцкий*)

4. Есть несколько различных двузначных чисел. Половина всех цифр в этих числах – двойки, в половине из этих чисел есть тройка, в трети из этих чисел – пятёрка. Сколько всего чисел? (*Т. Голенищева-Кутузова*)

5. В вершинах куба записали натуральные числа так, что каждое число меньше суммы трёх его соседей и является её делителем. Обязательно ли все записанные числа одинаковы? (*А. Шаповалов*)

6. В клетчатом квадрате закрасили две диагонали, имеющие общую клетку. В одной из них n клеток, а в другой – $n + 1$ клетка. Каковы могут быть размеры квадрата, если **а**) $n = 19$; **б**) $n = 100$? (*А. Блинков*)

7. Однажды Гоголь решил напугать Тургенева: переоделся Пушкиным и пошёл к Тургеневу в гости. А Тургенев в тот же день решил напугать Гоголя: он также переоделся Пушкиным и пошёл к Гоголю в гости. Ровно в полдень они встретились на Тверском бульваре, но не узнали друг друга и прошли мимо. В 12:45 Тургенев дошёл до дома Гоголя, увидел, что того нет дома, и сразу пошёл назад. А Гоголь дошёл до дома Тургенева в 13:15 и тоже сразу пошёл назад, поскольку Тургенева не оказалось дома. В 13:45 Гоголь и Тургенев снова встретились и хором закричали: «Ай да Пушкин! Ай да сукин сын!» Кто из них и на сколько минут раньше вышел из дома? Каждый писатель ходит со своей постоянной скоростью. (*И. Раскина*)

8. Существует ли замкнутая **а**) 11-звенная; **б**) 12-звенная ломаная, пересекающая каждое своё звено ровно два раза во внутренних точках? (*А. Пешнин*)

9. **а**) На острове живут 18 человек, каждый из которых принадлежит либо племени рыцарей, либо племени лжецов. В каждом племени есть хотя бы один человек, при этом рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Однажды все жители острова встали в круг через равные промежутки, и каждый заявил, что среди трёх людей – двух его соседей и человека, стоящего напротив, – есть представители обоих племён. Сколько лжецов на острове?

б) В условиях пункта а) для 66 жителей острова какое наибольшее количество лжецов может быть среди них? (*А. Грибалко*)

10. Есть девять одинаковых на вид монет, одна из них фальшивая – она легче настоящих. Имеются также двое чашечных весов, одни из которых точные, а другие грубые, но неизвестно, какие именно весы точные. Грубые весы всегда показывают равновесие, если на их чаши положить по одинаковому количеству монет. Как за три взвешивания найти фальшивую монету?

11. **а**) В шахматном турнире за победу начислялось 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0. По окончании турнира Вася, занявший не первое и не последнее место, имел тот же процент набранных очков, что и перед последним туром. Какой?

б) В футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По окончании турнира команда, не ставшая ни первой, ни последней, имела тот же процент набранных очков, что и перед последним туром. Какой?

Процент набранных очков – это отношение суммы набранных очков к максимально возможной, выраженное в процентах. (*А. Блинков*)

12. Основание AB равнобедренного треугольника ABC равно 1. Через точку A проведена прямая AD так, что точки C и D лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AB и $\angle BAD = \angle C$. Из точки C на прямую AD опущен перпендикуляр CE. Найдите длину отрезка AE. (*Е. Бакаев*)

13. Рассматриваются всевозможные пары из девяти заданных положительных чисел. Оказалось, что ровно в двух парах числа отличаются больше чем в 100 раз. Докажите, что найдётся пара чисел, отличающихся меньше чем в 2 раза. (*Е. Бакаев*)

14. Есть n палочек, длины которых равны 1, 2, …, n. При каких n из них можно сложить контур квадрата, используя их все? (*А. Блинков*)

15. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны углы A и A_1, равны высоты, проведённые из вершин B и B_1, и равны медианы, проведённые из вершин C и C_1. Известно, что треугольники не равны. Может ли хотя бы один из них быть остроугольным? (*А. Блинков*)

16. **а**) На шахматной доске стоит шесть ладей и несколько слонов. Никакая фигура не бьёт другую. Какое наибольшее количество фигур может быть на доске?

б) На доске 12×12 стоит поровну ладей и слонов. Никакая фигура не бьёт другую. Какое наибольшее количество фигур может быть на доске? (*А. Шаповалов*)

17. Известно, что число a представимо в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, разность которых больше 1. Докажите, что число $(a + 1)^2$ представимо в виде суммы квадратов пяти различных натуральных чисел. (*А. Грибалко*)

18. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена произвольная точка K. Пользуясь только линейкой без делений, постройте какой-нибудь прямоугольник с вершиной K, вписанный в этот квадрат. Каждая сторона квадрата должна содержать одну вершину прямоугольника. (*Г. Филипповский*)

19. **а**) В однокруговом турнире участвует $2n$ команд, среди которых ровно половина «топовых». Организаторы хотят составить расписание так, чтобы в каждом туре было не более одного матча между «топовыми» командами. При каком наибольшем n это возможно?

б) В однокруговом турнире участвует 16 команд, среди которых шесть «топовых». Организаторы хотят составить расписание так, чтобы в каждом туре было не более одного матча между «топовыми» командами. Возможно ли это? (*А. Блинков*)

20. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC описана окружность. На дуге AB, не содержащей точку C, отмечена точка D, точка E симметрична точке C относительно прямой BD. Докажите, что точки A, D, E лежат на одной прямой.

(*А. Шкловер*)

21. Дан параллелограмм *ABCD*. В треугольнике *ABD* проведены высоты *BK* и *DL*, пересекающиеся в точке *H*. Докажите, что прямые *KL* и *CH* перпендикулярны.

(*М. Волчкевич*)

Командная олимпиада

22. Имеется десять стальных шариков, семь из которых весят по 100 г, два – по 99 г и один – 98 г. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь найти хотя бы один шарик массой 100 г?

23. Есть бумажный прямоугольник, длина которого в 2 раза больше ширины. Можно ли разрезать его на четыре части и сложить из них прямоугольник, длина которого в 4 раза больше ширины?

24. Семеро друзей несколько раз ходили вместе в кино. Каждый раз они занимали семь подряд идущих мест в одном ряду. Могло ли оказаться, что каждые двое сидели рядом ровно один раз?

25. Матроскин и Шарик каждое утро бегают на речку умываться. Они выбегают из дома одновременно и бегут по одной и той же тропинке. Скорость каждого из них постоянна, но Матроскин бегает в 3 раза быстрее Шарика. Моется же Матроскин в 2 раза дольше, чем Шарик. Однажды Шарик, прибежав к речке, обнаружил, что не взял с собой полотенце. Он тут же побежал домой, схватил полотенце и прибежал к речке в тот момент, когда Матроскин закончил умываться. Кто обычно прибегает домой раньше: Матроскин или Шарик?

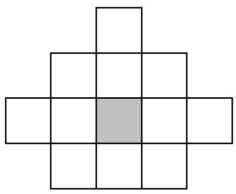
26. Сколько решений имеет ребус НАРОД + ВЫБОР = ВЫБОРЫ? (*М. Волчкевич*)

27. Некоторые клетки доски 100×100 удалены. Известно, что если какая-то клетка удалена, то все клетки, стоящие над ней в вертикали, и все клетки, стоящие правее неё в горизонтали, тоже удалены.

а) Одна из 100 клеток диагонали, соединяющей левый верхний угол с правым нижним, удалена. Докажите, что на оставшейся части доски нельзя расставить 100 не бьющих друг друга ладей.

б) На оставшейся части доски стоят не бьющие друг друга ладьи, атакующие все оставшиеся клетки. Докажите, что их можно переставить так, чтобы они стояли на одной диагонали и по-прежнему атаковали всю оставшуюся доску. (*Е. Бакаев*)

28. Заполните 11 клеток (см. рисунок) числами 1, 2, …, 11 так, чтобы выполнялось условие: если число имеет более одного соседа по стороне, то сумма его соседей делится на него. (*М. Евдокимов*)



29. В олимпийском хоккейном турнире участвует 12 команд. На первом этапе они, разбившись на три группы по четыре команды, проводят однокруговые турниры. Если основное время матча заканчивается победой одной из команд, то эта команда получает 3 очка, а проигравшая − 0. В противном случае назначается дополнительное время до первого гола, и команды получают 2 и 1 очко соответственно.

а) В четвертьфинал вышли восемь команд, набравших больше очков, чем каждая из остальных четырёх команд. Какова наименьшая возможная сумма очков четвертьфиналистов? (*А. Заславский, И. Раскина*)

б) В четвертьфинал вышли первые две команды из каждой группы, а также две команды, занявшие третьи места и набравшие больше очков (в случае равенства очков у двух команд учитывались дополнительные показатели). Какова наименьшая возможная сумма очков четвертьфиналистов? (*А. Заславский*)

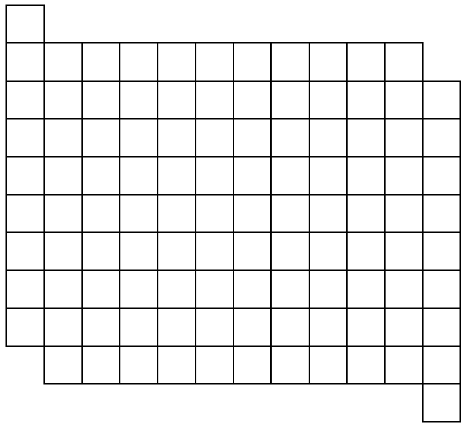
30. На девяти карточках написаны числа 1, 2, …, 9. Каждому из трёх мудрецов – Саше, Коле и Диме – дали по три карточки и сообщили, что у всех суммы чисел на карточках простые. Каждый знает свои числа, но не знает, какие числа у остальных. Между ними состоялся следующий разговор.

Саша: «Я знаю, чему равны суммы на ваших карточках, но не знаю, у кого какая».

Коля: «Саша, у тебя сумма больше, чем у меня».

Чему равны суммы чисел у каждого из мудрецов?

(*А. Грибалко, И. Раскина*)



31. Можно ли разрезать фигуру, изображённую на рисунке, на восемь равных частей? (*Е. Бакаев*)

32. В стране Равных Возможностей во всех коробках одинаковое число конфет. Каждый из 18 жителей этой страны, приглашая на свой день рождения гостей, покупает одну такую коробку и делит поровну конфеты на всех, включая себя. За год один из них съел на днях рождения 39 конфет, двое – по 25, четверо – по 84, ещё четверо – по 95 и семеро – по 65. Больше всех гостей пригласил Ваня. Сколько гостей было на Ванином дне рождения? (*И. Раскина*)

33. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили точки K и L соответственно. Отрезки AL и CK пересекаются в точке P. Оказалось, что $KC = BC$ и $PC = PB = BL$. Докажите, что $AL = AB$. (*Е. Бакаев*)

34. Из нескольких палочек сложен многоугольник. Известно, что палочек не менее шести и из каждой тройки подряд идущих палочек можно сложить треугольник.

а) Докажите, что найдутся не соприкасающиеся друг с другом три палочки, из которых можно сложить треугольник.

б) Известно, что палочек чётное число. Их раскрасили в два цвета так, чтобы цвета по кругу строго чередовались. Докажите, что найдутся три палочки одного цвета, из которых можно сложить треугольник. (*А. Шаповалов*)

35. Назовём вершину треугольника удачной, если биссектриса, исходящая из неё, равна одной из выходящих из неё же сторон. Верно ли, что если у треугольника две вершины удачные, то он равнобедренный? (*А. Хачатурян*)

36. В шахматном турнире участвовало n игроков. Вначале они разделились на k равных групп, где $1 < k < n$, в каждой группе все сыграли друг с другом по разу, и определился победитель каждой группы. Затем прошёл финал, в котором все победители групп сыграли друг с другом по разу. Число k было выбрано так, чтобы общее количество партий в турнире было наименьшим (при данном n). Докажите, что численность участников финала не меньше, чем численность группы. (*Б. Френкин*)

37. Известно, что $a \geq b > 0$ и $a^3 + b^3 = a + b$. Докажите неравенство $a^4 + 2 \leq 3a^2$.

(*Б. Френкин*)

38. На стороне AC треугольника ABC взята точка K так, что $CK = AB$. Точка L – проекция точки C на прямую, проходящую через точку K и параллельную биссектрисе угла A. Докажите, что точка L лежит на прямой, содержащей среднюю линию треугольника ABC. (*Ф. Куянов*)

39. В десятичной записи числа n! стёрли некоторую цифру и все цифры, равные ей. Могло ли полученное число снова оказаться факториалом, если n кратно 5? (*А. Пешнин*)

40. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точку её касания с одним из катетов соединили отрезком с противоположной вершиной. Оказалось, что полученный отрезок делится вписанной окружностью треугольника пополам. Какой угол образует этот отрезок с данным катетом? (*М. Волчкевич*)

Первый тур

41. **а**) Из доски 2019×2019 вырезали центральную клетку. Можно ли оставшуюся часть разбить на четырёхклеточные уголки?

б) Из доски 19×19 Андрей вырезал одну клетку, а оставшуюся часть разбил на четырёхклеточные уголки. Какую клетку мог вырезать Андрей?

в) Та же задача для доски $n \times n$, где n нечётно. (*А. Зерцалов*)

42. В ряд записано 100 натуральных чисел. Сумма каждой тройки подряд идущих чисел равна 16.

а) Известно, что сумма всех чётных чисел больше суммы всех нечётных на однозначное число. На какое именно?

б) Известно, что сумма всех чётных чисел отличается от суммы всех нечётных на однозначное число. Какая из этих сумм больше и на сколько? (*А. Шаповалов*)

43. На полдник команда получила столько же яблок, сколько ватрушек и стаканов сока вместе взятых. Каждый школьник съел по яблоку и выпил по стакану сока, после чего яблок и стаканов сока вместе осталось столько же, сколько ватрушек. Остался ли стакан сока для руководителя команды? (*А. Шаповалов*)

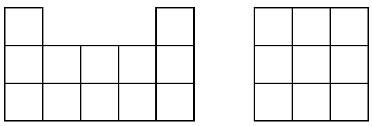
44. **а**) Вдоль прямого коридора аэропорта расположено 64 выхода на посадку. Каждая пара соседних выходов связана лентой, движущейся только в одну сторону. Известно, что к одному выходу можно добраться от любого другого, пересаживаясь с ленты на ленту. За один вопрос можно про любую пару соседних выходов узнать, в какую сторону движется лента между ними. Как за шесть вопросов найти тот выход, к которому можно отовсюду доехать на ленте?

б) В круговом коридоре аэропорта расположено 64 выхода на посадку. Каждая пара соседних выходов связана лентой, движущейся только в одну сторону. Известно, что ровно к одному выходу можно добраться от любого другого, пересаживаясь с ленты на ленту. За один вопрос можно про любую пару соседних выходов узнать, в какую сторону движется лента между ними. За какое наименьшее число вопросов можно наверняка найти тот выход, к которому можно отовсюду доехать на ленте? (*А. Шаповалов*)

45. Элли посадила 15 цветков и утверждает, что какое бы натуральное число от 1 до 7 ей ни назвали, она сможет указать прямую, на которой растёт ровно столько цветков. Может ли это быть правдой?

46. Дрессированный муравей обычно ползёт со скоростью 10 см/мин, а если ему крикнуть «Беги!», то со скоростью 30 см/мин. Дрессировщик предлагает зрителю отрезать и спрятать от метровой ленты любой кусочек, меньший её половины. Линейки у дрессировщика нет, но он может и до, и после отрезания складывать ленту и отмечать на ней точки. Затем он пускает муравья бежать по остатку ленты и в нужный момент кричит «Беги!» Как ему действовать, чтобы муравей пробежал ленту ровно за 5 минут? (*И. Рубанов*)

47. Петя поставил на площадку 3×5 несколько кубиков с ребром длины 1. На рисунках показаны виды спереди и сбоку того, что получилось.



а) Мог ли Петя обойтись 15 кубиками?

б) Какое наименьшее число кубиков мог поставить Петя?

48. Найдите наименьшее натуральное число, вычёркиванием цифр из которого можно получить запись любого натурального числа от 1 до 32. (*С. Токарев*)

49. В каждой из 100 крайних клеток доски 26×26 живёт рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда врёт. Каждый человек дружит с живущими с ним в одной строке, а также с живущими с ним в одном столбце и ни с кем больше. Каждый заявил, что среди его друзей поровну рыцарей и лжецов. Сколько рыцарей может жить на доске? (*А. Грибалко*)

50. Решите ребус $\left(\dfrac{\text{ИКС}}{\text{И}+\text{К}+\text{С}}\right)^2 = \text{ИКС} + \dfrac{\text{ИКС}}{\text{И}+\text{К}+\text{С}}$.

51. Буратино выписал все натуральные числа, цифры которых убывают, а затем в каждом вставил минусы и плюсы между каждой парой соседних цифр так, чтобы первым был минус и знаки чередовались, и вычислил результат (например, для числа 97641 он получил $9-7+6-4+1=5$). Затем Буратино сложил все полученные результаты. Сколько у него получилось?

52. Каждая диагональ четырёхугольника разбивает его на два треугольника. Про эти четыре треугольника известно, что в двух из них отрезок диагонали является биссектрисой, а в третьем – медианой. Можно ли утверждать, что в четвёртом треугольнике отрезок диагонали является биссектрисой? (*А. Шаповалов*)

53. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равнобедренные прямоугольные с прямыми углами C и C_1. Известно, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на сторонах CA, AB, BC соответственно. Докажите, что $AA_1 = 2CC_1$.

54. Биссектрисы AA_1, BB_1, CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку BB_1 пересекает прямые AA_1 и CC_1 в точках A_0 и C_0 соответственно. Докажите, что описанные окружности треугольников ABC и A_0IC_0 касаются. (*Д. Швецов*)

55. Докажите, что для любого натурального $n > 3$ существует выпуклый равносторонний n-угольник, который можно разрезать непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. (*А. Грибалко*)

56. Найдите все тройки натуральных чисел (a, b, c), для которых число $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$ простое. (*С. Токарев*)

Второй тур

57. На вечеринке каждому из шести участников было подано пирожное на тарелке. Увидев, что это не любимое его пирожное, каждый передал свою тарелку кому-то другому, при этом передачи происходили одновременно и, возможно, кто-то получил несколько тарелок с пирожными. Обязательно ли найдётся пара людей, каждый из которых не получал пирожного от другого?

58. Есть два одинаковых бочонка мёда. Троглодит съедает один бочонок быстрее, чем Винни Пух вместе с Пятачком второй бочонок. Пока Пятачок и Троглодит будут есть один бочонок, Винни Пух успеет съесть больше половины второго бочонка. Успеет ли Пятачок съесть четверть бочонка мёда, пока Винни Пух вместе с Троглодитом будут есть мёд из второго бочонка?

59. Женя и Маша играют в игру, в каждом раунде которой за победу начисляется 2 очка, а за проигрыш отнимается 1 очко. Женя выиграла ровно в трёх раундах, а Маша закончила игру с 5 очками. Сколько было раундов?

60. На острове живёт по шесть рыцарей, лжецов и монахов, причём все жители выглядят одинаково. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут, а если монаху задать вопрос, то он находит в «Книге ответов на все вопросы» точно такой же вопрос и отвечает, как написано в ответе. Один островитянин забыл, кто есть кто, включая его самого. Сможет ли он, задав **а**) 15 вопросов; **б**) 14 вопросов, требующих ответа «Да» или «Нет», выяснить, кто он: рыцарь, лжец или монах? (*М. Хачатурян*)

61. Расставьте на шашечной доске 10×10 восемь дамок так, чтобы каждая из них могла побить одним ходом все остальные. (*С. Токарев*)

62. Юра разрезал прямоугольник 20×19 на три прямоугольника, периметры которых равны одному и тому же целому числу. Какое это число? (*М. Волчкевич*)

63. Дом – это клетчатый прямоугольник, каждая клетка которого – квартира. Жители такого дома считают своими соседями всех, кто живёт непосредственно над или под ними, а также на одном этаже.

а) Докажите, что переселение жильцов двухэтажного дома в шестиэтажный с таким же числом квартир можно организовать так, чтобы ни у кого не появилось новых соседей.

б) В сентябре всех жителей переселяют в новый дом с таким же числом квартир. Всегда ли удастся организовать переселение так, чтобы у каждого хотя бы один сосед не поменялся?

в) Для переселения жильцов k-этажного дома построили шестиэтажный дом с таким же числом квартир. Жильцы требуют, чтобы при переселении ни у кого не появилось новых соседей. Найдите все k, для которых это требование заведомо выполнимо, независимо от числа квартир на этаже. (*А. Банникова, М. Артемьев, И. Раскина*)

64. **а**) Два натуральных числа отличаются на 2345. Может ли сумма цифр одного из этих чисел быть ровно в 2345 раз больше суммы цифр другого?

б) Два натуральных числа отличаются на 2019, а сумма цифр одного из этих чисел ровно в 2019 раз больше суммы цифр другого. Может ли такое быть?

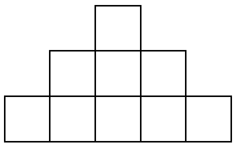
в) В условиях пункта б) найдите наименьшую пару таких чисел. (*М. Евдокимов*)

65. За круглый стол сели 12 человек. Может ли оказаться, что каждые два человека, сидящие напротив друг друга, не имеют за столом общих знакомых, а каждые два, сидящие не напротив, имеют? (*С. Токарев*)

66. Соня спит тогда и только тогда, когда часовая и минутная стрелки часов образуют угол, не превосходящий 60°. Сколько времени в течение суток спит Соня?

67. В теннисном турнире участвовало **а**) 20 человек; **б**) 30 человек; **в**) $2n$ человек, которые в каждом туре разбивались на пары. За победу начислялось 1 очко, за поражение – 0, ничьих в теннисе не бывает. Для экономии средств организаторы решили закончить турнир, как только все участники набрали разное число очков. Какое наименьшее количество туров могло пройти? (*А. Блинков*)

68. У Дани есть десять карточек с различными целыми числами от 0 до 9. Он отложил одну карточку, а из оставшихся сложил фигуру, показанную на рисунке. Оказалось, что отношение суммы чисел в нижнем ряду к сумме чисел в среднем ряду и отношение суммы чисел в среднем ряду к верхнему числу **а**) равны одному и тому же целому числу; **б**) равны. Карточку с каким числом мог отложить Даня? (*А. Банникова*)



69. Робин, Бобин и Барабек ели в ресторане шоколадные фигурки коров, быков и пастухов. Робину подали двух коров, семь быков и одного пастуха, Бобину – пять коров, шесть быков и пять пастухов, Барабеку – восемь коров, четырёх быков и девять пастухов. Все съели поровну шоколада, хотя один из них не смог доесть свою порцию. Кто именно? (*С. Берлов, Д. Ширяев, С. Волчёнков*)

70. В треугольнике ABC отмечена точка K так, что $AK = CK$. Биссектрисы углов BAK и BCK пересекаются в точке L. Докажите, что $KL < AK$. (*Е. Бакаев*)

71. В треугольнике ABC провели биссектрису AL и высоту BH. Оказалось, что угол между прямыми AL и BH равен 30°. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $AB + AL = 2BH$. (*А. Пешнин*)

72. На доске 9×9 закрашено несколько клеток так, что от каждой закрашенной клетки можно добраться до любой другой закрашенной, двигаясь только по закрашенным клеткам и каждый раз переходя на соседнюю по стороне клетку. Какой наибольший периметр может быть у закрашенной фигуры? (*С. Иванов*)

73. В треугольнике ABC проведены высоты AP и BQ. Точки M и N – середины отрезков AB и PQ соответственно. Прямая CN пересекает AB в точке D, а прямая CM пересекает PQ в точке E. Докажите, что прямые AB и DE перпендикулярны. (*М. Волчкевич*)

74. В квадрате $ABCD$ отмечены точки K и L так, что точка K находится внутри треугольника ABD, точка L – внутри треугольника BCD, а треугольники ABK и LDK равны ($\angle ABK = \angle LDK$, $\angle BAK = \angle DLK$). Докажите, что точки C, D, K и L лежат на одной окружности. (*Д. Попов*)

75. Все степени двойки от 1 до 2^{100} выписаны последовательно без пробелов: 12481632…6. Докажите, что полученное число не является степенью двойки. (*С. Токарев*)

76. За одну операцию можно разрезать многоугольник прямолинейным разрезом на две части, оставить одну из них и отложить вторую. Можно ли, начав с равнобедренного прямоугольного треугольника, за восемь таких операций отложить восемь одинаковых фигур?

77. На столе лежит n фишек. Два игрока ходят по очереди. За один ход можно взять со стола любое число фишек, являющееся точным квадратом. Выигрывает тот, кто возьмёт последнюю фишку. Докажите, что существует бесконечно много значений n, для которых второй игрок может выиграть, как бы ни играл первый.

Третий тур

78. У Васи есть три прибора, которые определяют, есть ли в пончике повидло. Один из приборов всегда даёт правильный ответ, второй – всегда неправильный, а третий выдаёт случайные ответы. Как-то Вася купил три пончика. Ему известно, что ровно один из них – с повидлом. Сможет ли он определить, какой именно, не ломая пончики?

79. Назовём классом доминошки неотрицательную разность очков на её половинках. Какое наибольшее число доминошек из стандартного набора домино можно выложить по правилам в замкнутую цепь так, чтобы все их классы были различны? (*С. Токарев*)

80. Решите ребус $4 \cdot \text{КЛОП} = \text{ПОЛК}$.

81. Из доски 50×50 вырезали прямоугольник 1×7 по линиям сетки. Докажите, что из оставшейся части доски можно вырезать ещё 356 таких же прямоугольников.

(*И. Постнов*)

82. Найдите наименьшее трёхзначное число с самой большой суммой цифр суммы цифр.

83. В зоопарке живут пять бегемотиков. Массы всех бегемотиков различны и измеряются целым числом центнеров. Известно, что каждые три бегемотика весят больше любых двух других. Найдите наименьшую возможную массу всех пяти бегемотиков.

84. У слонёнка дома сломались механические часы-будильник: теперь они ходят в 2 раза медленнее. Сейчас полночь, и часы показывают правильное время. Будильник всегда выставлен на определённое время. Каждый раз, когда он звонит, слонёнок мгновенно выставляет на часах правильное время. Сколько раз будет звонить будильник в ближайшие трое суток? (*М. Хачатурян*)

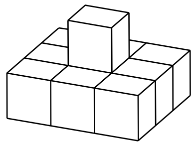
85. На уроке физкультуры учитель выдал классу из 28 человек несколько мячей. Дети стали перекидывать их друг другу, причём держать сразу два мяча они не могут. В конце оказалось, что по крайней мере 14 детей бросали мяч чаще, чем ловили. Сколько мячей выдал детям учитель?

86. К реке с двух сторон одновременно подошли n отдыхающих (с каждой стороны подошёл хотя бы один человек). У одного берега есть лодка, на которой можно плавать только вдвоём. Отдыхающие сделали несколько переправ на противоположный берег так, что каждая пара из них проплыла ровно по разу. В результате каждый оказался на противоположном берегу.

а) При каком наименьшем n такое могло случиться?

б) Докажите, что если $n = 4k + 2$, то при некотором начальном распределении отдыхающих по берегам такое могло случиться. (*А. Шаповалов*)

87. Какое наибольшее количество одинаковых деталей конструктора, состоящих из единичных кубиков (см. рисунок), можно сложить в коробку размером $4 \times 4 \times 4$? (*Н. Наконечный*)



88. В кинотеатре «Ударник» каждое пятое место в ряду красное, а в кинотеатре «Соловей» – каждое **а**) шестое; **б**) четвёртое, остальные места синие. Класс сходил сначала в один кинотеатр, а потом в другой. Каждый раз все сидели в одном ряду, занимая места подряд без пропусков, но, возможно, не с начала ряда. Оба раза оказалось, что все девочки сидели на красных местах, а мальчики – на синих. Какое наибольшее количество человек может учиться в этом классе? (*И. Постнов*)

89. **а**) Верно ли, что каждое натуральное число от 2019 до 4038 можно представить в виде суммы двух натуральных слагаемых с одинаковыми суммами цифр?

б) Докажите, что для любого натурального n между числами n и $3n$ включительно найдётся натуральное число, не представимое в виде суммы двух натуральных слагаемых с одинаковыми суммами цифр. (*А. Шаповалов*)

90. Числа 1, 2, …, N в каком-то порядке записали по кругу. За одну операцию между каждыми двумя соседними числами записывают их полусумму, а исходные числа стирают.

а) Могут ли при $N = 6$ после нескольких таких операций снова получиться шесть натуральных чисел?

б) При каких $N > 2$ после нескольких таких операций могут снова получиться N натуральных чисел? (*С. Токарев*)

91. Во двор жилого дома вышли шесть пенсионеров, и каждый сыграл в шашки ровно с двумя другими. На следующий день вышли пять пенсионеров, и опять каждый сыграл в шашки ровно с двумя другими. Оказалось, что никакие двое не играли дважды и нет трёх пенсионеров, которые сыграли каждый с каждым. Какое наименьшее число пенсионеров может быть в этом дворе? (*С. Волчёнков*)

92. Два игрока по очереди закрашивают клетки доски 99×99. Первый закрашивает по две клетки, причём одна из них должна быть на две строки выше и на два столбца правее другой. Второй закрашивает по три клетки, образующие уголок. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Е. Бакаев*)

93. Юля нарисовала выпуклый девятиугольник и хочет провести в нём каждую диагональ одним из имеющихся у неё фломастеров четырёх разных цветов. Сможет ли она сделать это так, чтобы одинаково окрашенные диагонали не пересекались?

94. В треугольнике ABC проведена медиана BM. На стороне AB отмечена такая точка K, что $\angle BMK = 90°$. Оказалось, что $BK = BC$. Найдите угол ABM, если $\angle CBM = 60°$.

95. Решите в натуральных числах уравнение $m^m = n! + 2$. (*А. Пешнин*)

96. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$ никакие две стороны не параллельны и $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$, $\angle E = \angle F$. Докажите, что серединные перпендикуляры к сторонам AB, CD, EF пересекаются в одной точке.

97. В треугольнике треть одной из медиан равна расстоянию между центром описанной окружности и точкой пересечения медиан. Докажите, что треугольник не может быть остроугольным. (*А. Пешнин*)

98. Есть полоска из n клеток. Сколькими способами можно, двигаясь по границам клеток и не проходя по одному и тому же отрезку дважды, пройти из левого нижнего угла в правый верхний?

99. Жюри олимпиады первоначально состояло из 30 человек. Каждый член жюри считает, что некоторые из его коллег компетентны, а остальные – нет, и не меняет своего мнения. В начале каждого тура проводится голосование, и те члены жюри, которые признаны некомпетентными более чем половиной голосовавших, исключаются из жюри на оставшуюся часть олимпиады. Никто не голосует по поводу собственной компетентности. Докажите, что последнее исключение произойдёт не позднее 15-го тура.

100. Дан остроугольный треугольник ABC. На прямых AB и AC отмечены отличные от вершин треугольника точки A_c и A_b соответственно так, что $BA_b = CA_c = BC$. Точка O_a – центр описанной окружности треугольника AA_bA_c. Аналогично определяются точки O_b и O_c. Докажите, что треугольники ABC и $O_aO_bO_c$ равны. (*М. Тимохин*)

101. Даны 200 различных действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$. В клетках таблицы 100×100 расставлены числа так, что на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит число $a_i + b_j$. Оказалось, что произведение чисел в каждой строке равно 1. Докажите, что произведение чисел в каждом столбце равно -1.

Финал

102. В выражении ГУРУ + НОРА + РАГУ + РУНО одинаковыми буквами зашифрованы одинаковые цифры, а разными – разные.

а) Может ли эта сумма быть простым числом?

б) Докажите, что эта сумма делится на трёхзначное число. (*С. Токарев*)

103. Петя увидел в учебнике четырёхзначное число и выписал на доску все возможные суммы его цифр (одной или нескольких). Если какое-то число надо было писать второй раз, то он его не писал. В итоге на доске были выписаны числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Какое число мог увидеть Петя? (*Н. Мартынова*)

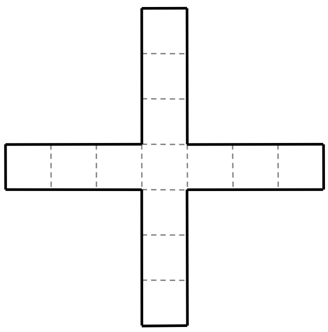
104. Муми-папа старше Муми-тролля в 4 раза, а Фрёкен Снорк старше Муми-тролля на 4 года. Через 14 лет суммарный возраст Муми-тролля и Фрёкен Снорк будет равен возрасту Муми-папы. Сколько лет Муми-троллю?

105. В наборе из восьми одинаковых на вид монет четыре весят по 10 г и четыре – по 11 г. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить массу хотя бы одной монеты? (*С. Токарев*)

106. Каждый день на 12-дневной смене летней математической школы проводятся три занятия: по алгебре, по геометрии и по комбинаторике. Известно, что в расписании комбинаторика в 3 раза чаще стоит до алгебры, чем после неё, а геометрия – в 3 раза чаще после алгебры, чем до неё. Может ли геометрия чаще стоять до комбинаторики, чем после неё? (*Н. Наконечный*)

107. На берегу реки Лимпопо растут пальма и баобаб. Надувной крокодил плывёт от пальмы до баобаба 25 минут. Живой крокодил за это время может проплыть от баобаба до пальмы. Сколько времени потребуется живому крокодилу, чтобы доплыть от пальмы до баобаба?

108. Есть проволочная рамка в форме креста (см. рисунок). На какое наименьшее количество частей её нужно разрезать, чтобы из них, используя все, можно было сложить контур квадрата? (*С. Токарев*)



109. В стране 25 городов, некоторые из которых соединены двусторонними авиалиниями. Из каждого города можно добраться до любого другого, сделав не более одной пересадки. Может ли оказаться, что каждый город соединён авиалиниями не более чем с десятью другими городами? (*М. Артемьев*)

110. В каждой клетке прямоугольной таблицы стоит рыцарь, который всегда говорит правду, или лжец, который всегда врёт. Каждый из них заявил, что в одной строке с ним находится больше рыцарей, чем в одном столбце. Докажите, что число рыцарей делится на количество столбцов таблицы. (*А. Грибалко*)

111. На бесконечной доске два игрока по очереди заполняют свободные клетки. Один из них использует крестики, а второй – нолики. Выигрывает тот, кто первым заполнит своими значками квадрат 2×2. Может ли первый игрок обеспечить себе победу?

112. Саша хочет выкинуть одно из чисел 1, 2, …, N, а остальные расставить по кругу так, чтобы все положительные разности между соседними числами были различны.

а) При каких N от 5 до 15 это возможно?

б) При каких N это возможно? (*А. Хачатурян*)

113. Мишень для игры в дартс поделена на 20 секторов, в которых написаны различные натуральные числа от 1 до 20. Назовём мишень правильной, если числа в каждых двух соседних секторах взаимно просты. Докажите, что количество различных правильных мишеней кратно **а**) 120; **б**) 240. Мишени, отличающиеся только поворотом, считаются одинаковыми. (*Н. Наконечный*)

114. Есть куча из n камней. Петя и Вася играют в такую игру. Сначала Петя берёт себе любое число камней от 1 до $n-1$. Далее, начиная с Васи, они по очереди берут из кучи от 1 до $2k-1$ камня, где k – число камней, взятое соперником предыдущим ходом. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник, если **а**) $n = 100$; **б**) n – произвольное натуральное число?

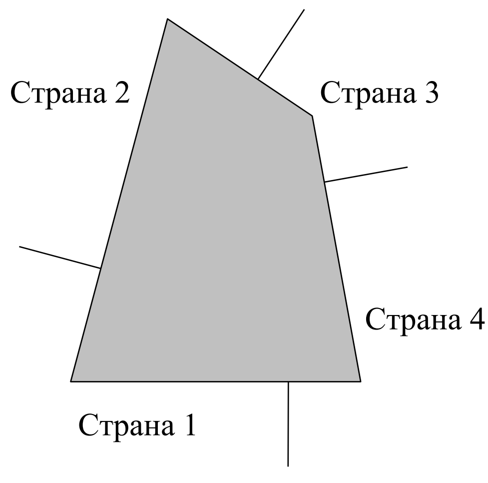
115. Петя ставит коня на шахматную доску, скрытую от Васи. Своим ходом Вася указывает любые три клетки доски. Если на одной из них стоит конь, он выиграл, иначе Петя делает ход конём. Вася опять указывает три клетки и так далее. Может ли Вася гарантированно выиграть не более чем за 1000 ходов? (*А. Шаповалов*)

116. Ученики музыкальной школы по очереди выступают на сцене, а затем возвращаются в зал в качестве зрителей. Во время Жениного выступления девочки составляли $\frac{2}{5}$, а во время Сашиного – $\frac{7}{17}$ сидящих в зале учеников. Сколько учеников собралось на концерте?

117. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На стороне AC нашлась такая точка D, а на отрезке BD – такая точка K, что $\angle ABC = \angle KAD = \angle AKD$. Докажите, что $BK = 2CD$.

118. Дед Мороз пришёл в детский сад с подарками. Дети их посмотрели, и каждый написал на листе бумаги, сколько подарков ему нравится. Дед Мороз вычислил сумму обратных величин ко всем числам, которые написали дети, и получил число не больше 1. Докажите, что Дед Мороз может дать каждому ребёнку по одному подарку, который тому нравится.

119. К озеру, имеющему форму выпуклого четырёхугольника, примыкают территории четырёх стран (см. рисунок). Границы между странами перпендикулярны границам озера, к которым они выходят. Нарисуйте границы их территориальных вод. Каждая точка озера должна принадлежать той же стране, что и ближайшая к ней точка берега. (*А. Заславский*)



120. Найдите все такие тройки **а**) натуральных чисел; **б**) целых чисел (a, b, c), что $3abc + 11(a + b + c) = 6(ab + bc + ca) + 18$.

121. Шахматная доска покрыта двухклеточными доминошками. Докажите, что длина границы между горизонтальными и вертикальными доминошками не превосходит 52. (*Б. Френкин*)

122. На стороне AB остроугольного треугольника ABC выбрана точка Q, а на стороне BC – точки P и R так, что $\angle APC = \angle PQA = \angle QRP = 90°$. Докажите, что если $AP = PQ + QR$, то $\angle APQ = 2\angle PAR$. (*А. Пешнин*)

123. В окружности ω проведены диаметр AB и перпендикулярная ему хорда, пересекающиеся в точке M. Окружность, проходящая через точки B и M, повторно пересекает окружность ω в точке P, а хорду – в точке Q. Докажите, что точки A, P, Q лежат на одной прямой. (*М. Панов*)

124. Можно ли равносторонний треугольник со стороной 3 разрезать на шесть выпуклых многоугольников, которыми удастся полностью покрыть некоторую окружность радиуса более 2? (*А. Грибалко*)

125. Точки M и N – середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. Серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает сторону BC в точке K. Прямые AK и CM пересекаются в точке P, а прямые BP и MN – в точке Q. Докажите, что описанная окружность треугольника ANQ касается прямой AK. (*Е. Бакаев*)

Источник: http://tursavin.ru