XXVII турнир математических боёв имени А.П. Савина

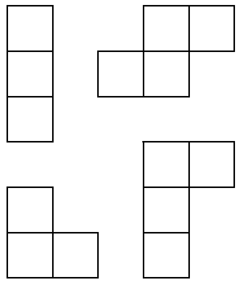
База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2022 года

Личная олимпиада

1. **а**) Можно ли, используя не более четырёх различных цифр, по одному разу каждую, а также знаки арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление), составить выражение, значение которого равно 2022? Возведение в степень использовать можно, а скобки нельзя. (*М. Евдокимов*)

б) Можно ли, используя три единицы и три семёрки, а также знаки арифметических действий (сложение, вычитание, умножение, деление), составить выражение, значение которого равно 2022? (*Т. Голенищева-Кутузова*)

2. Сложите из четырёх фигур, изображённых на рисунке, клетчатый многоугольник, у которого есть ось симметрии, а периметр равен **а**) 16; **б**) 18. Фигуры можно поворачивать и переворачивать, сторона клетки равна 1. (*М. Волчкевич*)



3. К левому берегу реки подошли четыре монаха и четыре туземца. Всем нужно на противоположный берег. Есть лодка, выдерживающая любых двоих из подошедших или троих самых лёгких монахов. Монахи боятся туземцев и не хотят оказаться на одном берегу с ними в меньшинстве. Как им всем переправиться? (*А. Шаповалов*)

4. На столе лежали семь яблок. Таня положила три яблока на одну чашу весов, а четыре – на другую, и весы показали равновесие. А Саша положил два яблока на одну чашу, а пять – на другую, и весы снова показали равновесие. Докажите, что можно положить на одну чашу весов одно яблоко, а на другую – три так, что весы окажутся в равновесии. (*А. Шаповалов*)

5. **а**) Из клетчатого квадрата 11×11 вырезали центральный квадрат 9×9, а оставшуюся рамку разрезали на различные клетчатые фигуры. Какое наибольшее количество фигур могло получиться?

б) Из клетчатого квадрата вырезали квадрат так, что образовалась рамка шириной в одну клетку. Известно, что из неё можно вырезать 11 различных клетчатых фигур. Какое наименьшее количество клеток может быть в рамке? (*Э. Акопян*)

6. На острове живут рыцари, лжецы и хитрецы. Всех жителей острова попросили написать, сколько среди них рыцарей. Каждый написал двузначное число, при этом рыцари написали правильно, лжецы соврали, а хитрецы – кто как. Оказалось, что цифра 3 написана 33 раза, цифра 5 – 66 раз, а цифра 7 – 77 раз. Никакие другие цифры написаны не были. Сколько всего рыцарей среди жителей этого острова? (*Т. Казицына, Б. Френкин*)

7. В тесном кругу за столом сидят повара, каждый из которых либо полный, либо худой. К счастью, никому не пришлось сидеть между двумя полными поварами, но всё же повар рад, если сидит между двумя худыми.

а) Полных и худых поваров поровну. Есть ли среди них те, кто рад?

б) Среди тех поваров, кто рад, полных и худых поровну. Какая часть худых рада, если рада треть полных? (*А. Шаповалов*)

8. Каждую грань куба $3 \times 3 \times 3$ разбили на единичные квадраты, а затем в некоторых из них провели по одной диагонали. Оказалось, что каждый конец проведённой диагонали служит концом ещё ровно одной диагонали. Какое наибольшее количество диагоналей могло быть проведено? (*М. Евдокимов*)

9. У Кости есть семь одинаковых на вид гирек массами 5 г, 6 г, 7 г, 8 г, 9 г, 10 г, 11 г. Также у него есть прибор, в который можно поместить любые пять гирек, и если суммарная масса каких-то трёх из них равна суммарной массе двух остальных, то на приборе загорается лампочка. Массу скольких гирек сможет определить Костя с помощью этого прибора? (*К. Кноп*)

10. Петя построил график некоторой функции. Васе доступны две операции на Петином чертеже, цель которых – сделать график неверным: поменять местами названия осей координат и поменять направление сразу на обеих осях (Вася может выполнить как обе операции, так и любую из них). Мог ли Петя выбрать такую функцию, что после любых действий Васи можно будет поменять единичный отрезок на одной из осей так, чтобы график снова стал верным? (*Д. Шноль*)

11. Назовём зигзагом трёхзвенную незамкнутую ломаную со звеньями равной длины, не имеющую самопересечений. Можно ли изобразить четырёхугольник с двумя диагоналями, используя какие-нибудь два зигзага? (*А. Пешнин*)

12. В шахматном турнире принимали участие мастера и гроссмейстеры. За победу начислялось 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0. В некоторый момент оказалось, что каждый участник набрал целое число очков. Докажите, что к этому времени в партиях между мастерами и гроссмейстерами было чётное число ничьих. (*А. Грибалко*)

13. Может ли ЧИСЕЛКО делиться на ЧИСЛО? Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, а разными – разные. (*А. Пешнин*)

14. Выпуклый четырёхугольник разрезали на четыре равных треугольника. Обязательно ли у него есть центр или ось симметрии? (*А. Заславский*)

15. У 33 богатырей было всего 800 монет. Каждый день один из богатырей отдавал другому столько монет, сколько у другого было в этот момент. В итоге все монеты собрались у одного богатыря. Докажите, что вначале у какого-то богатыря не было монет. (*А. Шаповалов*)

16. **а**) На гранях куба написали все натуральные числа от 1 до 6. Для каждой вершины вычислили произведение чисел на гранях, содержащих эту вершину, после чего сложили полученные произведения. Какие пары чисел написаны на противоположных гранях, если известно, что полученный результат – наименьший из возможных?

б) На гранях куба написали все натуральные числа от 1 до 6. Для каждого ребра вычислили произведение чисел на гранях, содержащих это ребро, после чего сложили полученные произведения. Какие пары чисел написаны на противоположных гранях, если известно, что полученный результат – наибольший из возможных? (*В. Клепцын, А. Блинков*)

17. Дан квадрат $ABCD$. Рассматриваются все такие отрезки EF, что точка E лежит на стороне BC, точка F – на продолжении стороны CD за точку D и $BE = DF$. Найдите геометрическое место середин EF. (*И. Сиротовский*)

18. В ряд лежат 16 одинаковых на вид монет. Известно, что из восьми левых монет одна фальшивая и из восьми правых монет одна фальшивая. Фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих. Предъявите сразу такие три взвешивания на чашечных весах без гирь, которые наверняка позволят определить, сколько настоящих монет лежит между двумя фальшивыми. (*К. Кноп*)

19. В неравнобедренном треугольнике ABC провели высоту из вершины A и биссектрисы из вершин B и C. Отметили три точки их попарного пересечения, пометив точку пересечения биссектрис, а остальное стёрли. С помощью циркуля и линейки восстановите треугольник ABC. (*Ю. Блинков*)

20. У царя есть 12 украшений из чистого золота. Он помнит только, что украшения весят 28 г, 29 г, …, 39 г, а ювелир точно знает, какое украшение сколько весит. Царь не доверяет ювелиру и считает, что тот мог всё напутать. Как ювелиру за три взвешивания на чашечных весах без гирь доказать царю, что он всё помнит правильно?

(*М. Евдокимов*, *А. Грибалко*)

Командная олимпиада и нулевой тур

21. Решите ребус УКАЗ + УКАЗ = ЗАКОН.

22. Каждую грань куба $3 \times 3 \times 3$ разбили на единичные квадраты, а затем отметили все вершины этих квадратов. Можно ли нарисовать на поверхности куба замкнутую ломаную, не имеющую самопересечений и проходящую через все отмеченные точки?

(*М. Евдокимов*)

23. В ряд стоят пять коробок, в которых слева направо лежит 1, 2, 3, 4, 5 орехов. За один ход можно выбрать две коробки, подсчитать, сколько всего орехов в коробках между ними, и переложить столько же орехов из одной коробки в другую. Можно ли добиться, чтобы число орехов в коробках стало равно 5, 4, 3, 2, 1 соответственно? (*А. Шаповалов*)

24. **а**) Коля закрасил в клетчатом квадрате 6×6 четыре клетки, образующие квадрат 2×2. Дима не видит квадрат, но за один вопрос может назвать Коле любой набор клеток и узнать, сколько из них закрашено. За какое наименьшее число вопросов Дима наверняка может узнать, какие клетки закрасил Коля?

б) Та же задача для квадрата 12×12.

в) У Коли есть 1000 единичных белых кубиков. Восемь из них он покрасил в чёрный цвет и составил из всех кубиков куб $10 \times 10 \times 10$, в котором чёрные кубики образуют куб $2 \times 2 \times 2$. Дима не видит куб, но за один вопрос может назвать Коле любой набор кубиков и узнать, сколько среди них чёрных. За какое наименьшее число вопросов Дима наверняка может узнать, где расположены чёрные кубики? (*А. Грибалко*)

25. Пете и его младшему брату Васе подарили одну коробку конфет «Вдохновение» и две коробки конфет «Белочка». В каждой коробке по восемь одинаковых конфет. Петя съедает конфету за столько секунд, сколько граммов она весит, а Вася ест вдвое медленнее брата. Сначала вскрыли коробку «Белочка». Как только конфеты в одной коробке кончаются, сразу вскрывается новая. Дети начали и закончили есть конфеты одновременно. Оказалось, что Васе досталось всего четыре конфеты «Белочка». Сколько весит одна конфета «Вдохновение», если одна «Белочка» весит 6 г? (*Т. Казицына*)

26. По кругу стоят рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего не менее $n + 1$ человека. Каждый из них сказал: «Среди n ближайших ко мне справа людей лжецов больше, чем рыцарей».

а) Докажите, что если $n = 9$, то рыцарей и лжецов в круге поровну.

б) Чему равно отношение количества рыцарей в круге к количеству лжецов, если $n = 10$? (*А. Грибалко*)

27. Есть набор из 30 гирь, который можно разложить на три килограммовые кучки, по десять гирь в каждой. Всегда ли такой набор можно расставить в клетках таблицы 3×10, по одной гире в клетку, так, чтобы в каждом ряду (строке или столбце) общая масса гирь была не больше 1 кг? (*А. Шаповалов*)

28. С левого конца прямой беговой дорожки одновременно стартовали заяц и волк, а с правого им навстречу – лиса. Каждый бежит со своей постоянной скоростью.

а) В момент встречи волка и лисы заяц как раз добежал до правого конца дорожки. Там он мгновенно развернулся и побежал назад. В момент его встречи с волком лиса как раз добежала до левого конца. Во сколько раз заяц быстрее волка?

б) В момент встречи волка и лисы заяц ещё не добежал до правого конца дорожки и был точно посередине между ним и местом встречи волка и лисы. Добежав до конца, заяц мгновенно развернулся и побежал назад. В момент его встречи с волком лиса ещё не добежала до левого конца и была точно посередине между ним и местом встречи зайца и волка. Во сколько раз заяц быстрее волка? (*А. Шаповалов*)

29. На доске написано число 202211. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход надо заменить в числе одну цифру, увеличив или уменьшив её на 1. Нельзя заменять первую цифру на 0, а также получать числа, кратные 3, и числа, которые уже встречались ранее. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

30. Однажды 100 учеников Хогвартса, где учатся чистокровные маги и полукровки, пронумеровали числами от 1 до 100 и спросили всех нечётных: «У скольких магов номер больше твоего?», а всех чётных: «У скольких магов номер меньше твоего?» Каждый ответил честно, но чистокровные маги не считают полукровок за магов.

а) Оказалось, что все названные числа не превосходят N. При каком наименьшем N это возможно?

б) Оказалось, что среди ответов число p было названо четыре раза, где p – количество опрошенных полукровок. При каком наименьшем p это возможно?

(*С. Усов*, *А. Шаповалов*)

31. На праздник пришли $2n$ гостей. У каждого из них не менее n знакомых среди присутствующих. Верно ли, что для любого n их всегда можно рассадить за длинным прямоугольным столом в два ряда так, чтобы рядом с каждым гостем и точно напротив него сидели его знакомые? (*М. Евдокимов*)

32. Решите в целых числах уравнение $2^x + 2^{x-1} + 1 = y^2$. (*А. Грибалко*)

33. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена медиана AM. На продолжении стороны AC за точку C выбрана такая точка D, что $\angle BAM = \angle CBD$. Докажите, что $AC = CD$. (*А. Марданов*)

34. В каждой клетке на поверхности кубика Рубика и на каждой из сторон клеток записаны натуральные числа так, что каждое число на стороне клетки делится на число в клетке. Сумма всех чисел на сторонах в 5 раз больше суммы всех чисел в клетках. Докажите, что найдутся стороны с одинаковыми числами на них. (*А. Шаповалов*)

35. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ углы A, C, E прямые. На стороне AE выбрана точка M так, что $\angle ABM + 90° = \angle CBM$ и $\angle EDM + 90° = \angle CDM$. Докажите, что прямая CM делит периметр пятиугольника $ABCDE$ пополам. (*Е. Бакаев*)

36. На столе лежат 1000 конфет. Первым ходом можно съесть одну конфету, а каждым следующим – столько, сколько было съедено на предыдущем ходе, или в 2 раза больше. За какое наименьшее число ходов можно съесть все конфеты? (*М. Раскин*)

37. В наборе различных натуральных чисел ни одно не является «началом» другого (в десятичной записи). Докажите, что сумма величин, обратных к этим числам, меньше 3.

38. На катетах AC и BC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC выбраны точки K и L соответственно так, что $AK = CL$. Докажите, что длина отрезка KL не меньше половины длины гипотенузы AB. (*Д. Швецов*)

39. При розыгрыше кубка по теннису участники в каждом туре разбиваются на пары и играют партии, после чего проигравшие выбывают (ничьих в теннисе не бывает). Если в очередном туре нечётное число участников, то один из них «отдыхает» и проходит в следующий тур. В одном кубковом турнире было m_1 участников и n_1 «отдыхающих», в другом – m_2 и n_2 соответственно. Количество туров в обоих турнирах одинаково. Верно ли, что в турнире с $m_1 + m_2$ участниками будет не больше $n_1 + n_2$ «отдыхающих»?

(*Б. Френкин*)

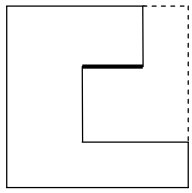
40. Даны прямая l, а также две точки A и B, лежащие в одной полуплоскости от l. С помощью циркуля и линейки постройте квадрат, одна вершина которого находится на l, соседняя с ней – в точке A, а прямая, проходящая через две другие вершины, проходит через точку B. (*К. Кноп*)

41. Семь гномов, работая на руднике, добыли 1000 золотых самородков массами 1 г, 2 г, …, 1000 г. Гномы хотят поделить всё золото так, чтобы ни у одного из них не было двух самородков, один из которых вдвое тяжелей другого, и не было трёх самородков, масса одного из которых равна сумме масс двух остальных. Есть ли у гномов способ справиться с этой задачей? (*А. Грибалко*)

42. Сколькими способами можно расставить различные натуральные числа от 1 до 100 в качестве угловых коэффициентов и свободных членов 50 линейных функций так, чтобы все точки пересечения полученных прямых лежали в первой четверти? (*А. Пешнин*)

Первый тур

43. Муха и паук начинают и заканчивают свой путь в одном и том же углу квадратного стола, но их маршруты отличаются. Муха ползёт по границе стола, преодолевая одну сторону за 7 секунд. А паук ползёт по маршруту, изображённому на рисунке, преодолевая расстояние, отмеченное жирным, за 1 секунду. Паук ползёт вдвое быстрее мухи. За какое время паук проползёт маршрут? (*А. Погода*)



44. Рассматриваются всевозможные пары натуральных чисел из набора 1, 2, …, 1000. У скольких пар произведение делится на 1001? (*А. Шаповалов*)

45. Однажды Лебедь, Рак да Щука везти с поклажей воз взялись. Если Лебедь и Щука потянут его вперёд, а Рак назад, то дорога займёт 10 часов. Если Лебедь и Рак потянут воз вперёд, а Щука назад, то потребуется 12 часов. Если же Рак и Щука потянут воз вперёд, а Лебедь назад, то 15 часов. За сколько времени воз достигнет цели, если Лебедь, Рак да Щука дружно потянут его вперёд? (*И. Раскина*)

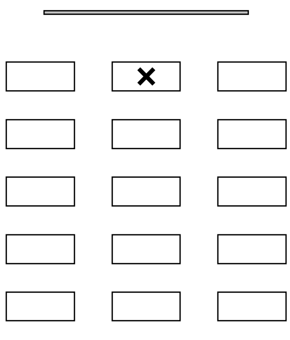
46. Вася с папой пришли в парк развлечений за 18 минут до его закрытия. В парке расположены рядом три аттракциона, сеанс на каждом из которых длится 1 минуту. Однако к каждому из аттракционов стоит очередь. Очереди движутся равномерно и подходят через 4, 4 и 6 минут соответственно. Можно занимать места в нескольких очередях, однако нельзя занимать более одного места в одной очереди. Как действовать папе, чтобы Вася успел прокатиться десять раз? Занимает очередь только папа, катается только Вася. (*М. Евдокимов*)

47. **а**) В школе 25 классов. Ася подсчитала количество отличников в каждой паре классов и записала их в список. А Вася для каждой пары классов вычислил разность количества отличников в этих классах и записал их в свой список. Оказалось, что наборы различных чисел в списках полностью совпадают. В скольких классах отличников нет совсем?

б) На доске написано несколько чисел, не обязательно различных. Сима записала всевозможные попарные суммы чисел с доски, а Роза – всевозможные модули разностей двух чисел. Каждое число, которое записала Сима, есть и у Розы. Обязательно ли каждое число, записанное Розой, есть и у Симы? (*Б. Френкин*)

48. На улице стоят три дома. В первом доме живут 18 мышей, во втором – 30, а в третьем – 32. У всех мышей родилось поровну мышат, а всего 480. Сколько теперь мышей живёт в каждом из трёх домов?

49. В классе 15 парт стоят в три ряда по пять парт. За каждой партой сидят два школьника. Каждую неделю детей пересаживают по такому правилу: на одно место назад и на одно место направо, с последнего ряда – на первый, а с самого правого места – на самое левое.



а) В начале года Максим и Алёша сидели за одной партой, обозначенной на рисунке крестиком. Будут ли они вновь сидеть за ней вместе?

б) В начале года Максим и Алёша сидели за одной партой (не обязательно за той, которая обозначена на рисунке крестиком). За сколькими ещё партами они успеют посидеть вместе к концу учебного года, то есть за 34 недели? (*А. Блинков*)

50. **а**) За круглым столом сидят 12 мудрецов. Им сообщили, что на них надели белые и чёрные колпаки, при этом у каждого цвет колпака совпадает с цветом колпака одного из его соседей. Каждый мудрец видит цвета всех колпаков, кроме своего. Всех мудрецов попросили одновременно написать (каждого на своей бумажке), может ли он определить цвет своего колпака. Один из них написал «Нет». Какое наибольшее количество групп сидящих подряд мудрецов в колпаках одного цвета может быть за столом?

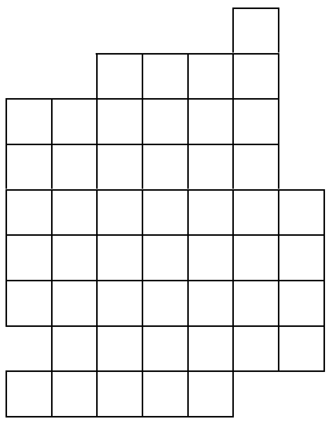
б) За круглым столом сидят 36 мудрецов. Им сообщили, что на них наденут белые и чёрные колпаки, при этом у каждого цвет колпака будет совпадать с цветом колпака одного из его соседей. Каждый мудрец будет видеть цвета всех колпаков, кроме своего. Все мудрецы должны будут одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет. Как им заранее договориться, чтобы не менее 24 из них написали цвет своего колпака?

в) В условиях пункта б) для 88 мудрецов могут ли они договориться действовать так, чтобы не менее 60 из них написали цвет своего колпака? (*А. Грибалко*)

51. Из спичек сложен клетчатый квадрат 8×8 так, что каждая клетка имеет сторону длиной в одну спичку и огорожена четырьмя спичками. Пока есть отрезки длины 2, Петя должен убирать их по одному отрезку за ход. Процесс заканчивается, когда нет ходов. Клетка считается целой, если её по-прежнему огораживают четыре спички. Какое наибольшее число целых клеток может оставить Петя? (*А. Шаповалов*)

52. На клетчатой бумаге отмечено 22 вершины клеток. Известно, что каждые три отмеченные точки можно зачеркнуть двумя прямыми по линиям сетки. Докажите, что все 22 точки можно зачеркнуть двумя прямыми по линиям сетки. (*А. Шаповалов*)

53. На доске написаны два натуральных числа. Петя вычислил их разность, а Вася – сумму всех написанных цифр. Их результаты совпали. Найдите наименьшее возможное значение этого результата. (*А. Шаповалов*)



54. Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на равные части, состоящие более чем из одной клетки. (*М. Артемьев*)

55. Внутри треугольника отметили точку и соединили её отрезками с вершинами. Треугольник разбился на три треугольника, один из которых оказался прямоугольным, а два других – равнобедренными. Найдите какой-нибудь угол исходного треугольника. (*А. Шаповалов*)

56. Для всех натуральных n докажите неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}<\frac{3}{4}.$$

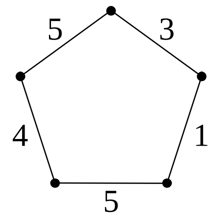
57. В выпуклом 999-угольнике проводятся по одной диагонали. Каждая новая диагональ должна пересекать во внутренних точках чётное число уже проведённых диагоналей (возможно, ни одной). Докажите, что в итоге по крайней мере две диагонали не будут проведены. (*А. Грибалко*)

58. В четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = 30°$, $\angle CBD = 70°$, $\angle ADB = 80°$, $\angle CDB = 40°$. Найдите угол ACD. (*М. Волчкевич*)

59. Через вершины A и B параллелограмма $ABCD$ проходит окружность ω_1, а через вершины C и D – окружность ω_2. Окружность ω_1 пересекает повторно прямые AD и BC в точках K и L, а окружность ω_2 пересекает те же прямые в точках M и N соответственно. Докажите, что $KM = LN$. (*А. Шкловер*)

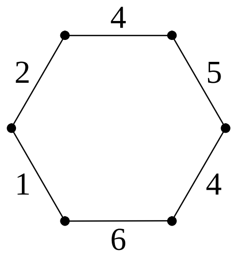
Второй тур

60. **а**) В вершинах пятиугольника были написаны различные натуральные числа от 1 до 5. Юра написал на каждой стороне либо сумму, либо разность чисел в соединяемых ею вершинах (на каждой – по своему выбору), а числа в вершинах стёр. На рисунке показано, что у него получилось. Для каждой вершины определите, какое число могло быть в ней написано.



б) Та же задача для шестиугольника, изображённого на рисунке.

(*В. Клепцын*)



61. Все депутаты парламента, в котором более одной партии, собрались за круглым столом. Каждый сказал либо своему соседу справа: «В твоей партии не больше депутатов, чем в моей», либо своему соседу слева: «У твоей партии нет большинства в парламенте». Известно, что депутаты всегда говорят правду своим и врут чужим. Может ли у какой-нибудь партии быть большинство в парламенте (то есть больше половины всех депутатов)? (*М. Хачатурян*)

62. **а**) Можно ли в клетках таблицы 3×3 расставить по три двойки, тройки и пятёрки так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце произведение чисел не равнялось 30?

б) Можно ли в клетках таблицы 9×9 расставить по 27 двоек, троек и пятёрок так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце произведение чисел не делилось на 30?

(*А. Шаповалов*)

63. За день пребывания в Летней Волшебной Школе знаний прибавляется на столько процентов, какое сегодня число. Например, за 30 июня знаний станет на 30% больше, а за 1 июля – только на 1%. Незнайка учился в ЛВШ с 10 по 20 июня включительно, а Знайка – с 11 по 21 июня. У кого теперь больше знаний и на сколько процентов, если до ЛВШ их знания были одинаковы?

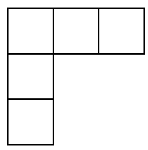
64. Зайдя в подъезд, Ваня увидел, что лифт находится на 17-м этаже. Он подсчитал, что до своего 9-го этажа может добраться пешком по лестнице или на лифте за одно и то же время, и поехал на лифте. Когда Ваня доехал до своего этажа, в подъезд зашла Таня. Она тоже поняла, что потратила бы одинаковое время, и тоже выбрала лифт. Когда Таня доехала до своего этажа, в подъезд вошёл Юра и понял, что до своего этажа он быстрее доберётся по лестнице. На каком этаже может жить Юра? Все поднимаются по лестнице с одинаковой скоростью. (*М. Хачатурян*)

65. Юля вырезала из шахматной доски фигуру из 20 клеток. Оказалось, что белых клеток в ней в 3 раза меньше, чем чёрных. Приведите пример такой фигуры.

66. Имелось по 1000 прямоугольных фигурок размером 1×1, 1×2 и 1×3. Из части фигурок сложили 77 полосок 1×5, остальные фигурки выбросили. Обязательно ли оставшиеся фигурки можно переложить так, чтобы получить 35 полосок 1×11?

(*А. Шаповалов*)

67. Пять одинаковых на вид гирек массами 18 г, 19 г, 20 г, 21 г, 22 г разложили в клетки пятиклеточного уголка (см. рисунок). Известно, что как в горизонтальной полоске из трёх клеток, так и в вертикальной массы гирек идут либо в возрастающем, либо в убывающем порядке. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без дополнительных гирь определить массу каждой гирьки? (*К. Кноп*)



68. **а**) Один мудрец продаёт другому овощную лавку. Цена определяется так. Продавец выдаст покупателю какой захочет набор из 20 гирь, каждая из которых весит целое число килограммов от 1 до 10. Покупатель должен будет поставить на каждую чашу весов по десять гирь. На сколько килограммов одна из чаш перевесит, столько миллионов рублей и надо будет заплатить. По какой цене будет продана лавка?

б) Номер автобусного билета в Цветочном городе состоит из $2n$ цифр. Разобьём их на два множества по n цифр. Назовём неудачностью разбиения модуль разности сумм цифр в этих множествах. Неудачность билета – это минимальное значение неудачности по всем таким разбиениям. Чему равна максимальная неудачность билета в Цветочном городе? (*Б. Френкин*)

69. На столе лежат две кучки конфет: в первой – 15 штук, во второй – 43. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно либо съесть одну конфету из любой кучки, либо переложить одну конфету из второй кучки в первую. При этом во второй кучке всегда должно оставаться больше конфет, чем в первой. Проигрывает тот, кто съест последнюю конфету из первой кучки. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Грибалко*)

70. Какое наибольшее число можно представить в виде суммы 27 слагаемых, каждое из которых равно какой-нибудь цифре этого числа? (*А. Шаповалов*)

71. Все натуральные числа **а**) от 1 до 100; **б**) от 1 до 2022 раскрасили в красный, жёлтый и зелёный цвета так, что каждое красное число можно представить как сумму жёлтого и зелёного. Каково наибольшее возможное количество красных чисел? (*А. Шаповалов*)

72. Король решил устроить тест своему придворному мудрецу. Мудрецу нужно написать на доске десятизначное число, после чего король назовёт какое-нибудь натуральное число от 1 до 100. Если мудрец сможет поставить знаки «+», «−», «×» между некоторыми цифрами числа на доске так, чтобы результат был равен числу короля, то он пройдёт тест. Какое число может написать мудрец, чтобы гарантированно справиться с заданием короля? (*М. Евдокимов*)

73. **а**) Рассматриваются всевозможные разбиения клетчатого квадрата 100×100 на двухклеточные доминошки. В скольких из них каждый квадрат 2×2 содержит целиком хотя бы одну доминошку?

б) Рассматриваются всевозможные разбиения клетчатого прямоугольника на двухклеточные доминошки. Будем называть удачным разбиение, в котором каждый квадрат 2×2 содержит целиком хотя бы одну доминошку. А разбиение, где в каждой доминошке можно провести по одной диагонали, никакие две из которых не имеют общих концов, назовём красивым. Докажите, что разбиение удачное тогда и только тогда, когда оно красивое. (*А. Грибалко*)

74. Сколько существует троек идущих подряд целых чисел, произведение которых является кубом целого числа? (*А. Пешнин*)

75. В треугольнике ABC биссектрисы пересекаются в точке I. Точки M и N – середины отрезков BI и CI соответственно. Оказалось, что $AM = AN$. Можно ли утверждать, что $AB = AC$? (*Е. Бакаев*)

76. В остроугольном треугольнике ABC сторона BC больше стороны AC. Высота AH равна отрезку серединного перпендикуляра к стороне AB, заключённому внутри треугольника. Найдите один из углов треугольника ABC. (*А. Пешнин*)

77. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Продолжение высоты CH пересекает описанную окружность в точке D. Описанные окружности треугольников ADH и BDH повторно пересекают прямые AC и BC в точках P и Q соответственно. Прямая QD повторно пересекает первую из этих окружностей в точке R. Докажите, что прямые RH и PQ перпендикулярны. (*А. Зданович*)

78. Жюри задумало одну из цифр от 1 до 9. Разрешено задавать вопросы, на которые возможны только ответы «Да» или «Нет». Жюри при этом имеет право один раз соврать, сказав «Да» вместо «Нет». За какое наименьшее число вопросов можно наверняка узнать задуманную цифру? (*С. Токарев*)

79. Можно ли в прямоугольник $2{,}75 \times 7$ поместить 20 непересекающихся кругов диаметра 1? (*А. Блинков*)

80. Целые числа p и q таковы, что p^2+q^2 – простое число. Могут ли оба корня уравнения $x^2+px+q=-1$ быть ненулевыми целыми числами?

Третий тур

81. Для команды из шести школьников родители купили билеты на поезд (не обязательно в один вагон). Каждая девочка написала на листочке произведение мест остальных девочек, а каждый мальчик – произведение мест остальных мальчиков. Руководителю команды показали получившийся список: 18, 23, 42, 42, 47, 63 и сообщили, что на место №1 билетов не покупали. Помогите ему определить места, на которых едут дети. (*М. Хачатурян*)

82. **а**) У Саши есть 11 карточек с числами 1, 2, …, 11. Выложив их все в ряд в некотором порядке без пробелов, Саша получит 13-значное число. Сколько всего различных чисел может выложить Саша?

б) У Саши есть 12 карточек с числами 1, 2, …, 12. Выкладывая их все в ряд в некотором порядке без пробелов, Саша получает 15-значные числа. Его интересуют только те числа, которые можно выложить более чем одним способом. Найдите количество таких чисел.

Нельзя переворачивать карточку с числом 6, чтобы получить 9, и наоборот.

(*А. Шаповалов*)

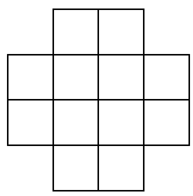
83. **а**) Карточки с натуральными числами от 1 до 100 лежали в ряд в порядке возрастания. Их раскрасили в 20 цветов, по пять карточек в каждый цвет, так, чтобы между каждыми двумя соседними карточками одного цвета лежали три карточки. Затем для каких-то десяти цветов выбрали карточку с наименьшим числом, а для остальных десяти – с наибольшим. Найдите сумму чисел на 20 выбранных карточках.

б) Карточки с натуральными числами от 1 до N лежали в ряд в порядке возрастания. Их раскрасили в $2M$ цветов, поровну в каждый цвет, так, чтобы между каждыми двумя соседними карточками одного цвета было одно и то же расстояние. Затем для каких-то M цветов выбрали карточку с наименьшим числом, а для остальных M – с наибольшим. Докажите, что сумма чисел на $2M$ выбранных карточках равна $(N+1)M$. (*Е. Бакаев*)

84. В Средиземье есть десять городов, в которых живут люди, гномы, эльфы и хоббиты (в каждом городе живёт только один народ). Некоторые города соединены дорогами, при этом дорога может соединять два города, только если в них живут представители одного народа. Обязательно ли в Средиземье найдутся три города, из которых выходит одинаковое число дорог?

85. В коллекции ювелира 100 украшений, масса каждого из которых равна 10 г или 11 г, но он не помнит, какое сколько весит. Также у него есть прибор, в который можно положить ровно N украшений, и он покажет их общую массу. Как, воспользовавшись этим прибором k раз, узнать суммарную массу всех украшений, если **а**) $N=67$, $k=3$; **б**) $N=74$, $k=4$; **в**) $N=51$, $k=5$? (*А. Грибалко*)

86. **а**) Разрежьте прямоугольник 3×4 не более чем на четыре фигуры, которыми можно оклеить в один слой поверхность некоторого куба.



б) Разрежьте фигуру, изображённую на рисунке, на две фигуры, которыми можно оклеить в один слой поверхность некоторого куба.

в) Можно ли разрезать прямоугольник 3×4 на две фигуры, которыми удастся оклеить в один слой поверхность некоторого куба? (*А. Грибалко*)

87. Перед магазином выстроилась очередь из 22 человек. Шестеро были в масках, а остальные – без масок. Граждане без масок соблюдают социальную дистанцию в 2 м, а в масках – 1 м. Какой длины могла получиться очередь?

88. Мама попросила купить 4 кг картошки и полкило печенья. Сын перепутал и купил вместо этого 4 кг печенья и полкило картошки. Вышло даже вдвое дешевле, чем рассчитывала мама. Что дороже: картошка или печенье, и во сколько раз?

89. Вася получил пятёрку за римские цифры и на радостях составил ребус MMXXII − 2022 · ГОД = 5. Расшифруйте его. (*В. Клепцын*)

90. Вначале есть **а**) 60 квадратов 1×1 и один квадрат 2×2; **б**) 1000 квадратов 1×1 и шесть квадратов 2×2. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход надо выбрать два равных прямоугольника и склеить их по большей стороне в один прямоугольник (квадраты склеивают по любой стороне). Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

91. Дано шесть различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел находится остаток при делении большего из них на меньшее. Может ли оказаться, что все эти остатки различны? (*А. Шаповалов*)

92. В футбольной секции занимаются 22 человека. Тренер перед каждым матчем делит их на две команды по 11 человек и хочет, чтобы каждые двое хотя бы раз оказались в одной команде. Какое наименьшее количество матчей ему придётся провести? (*А. Грибалко*)

93. Прямоугольник разрезали на полоски $1 \times n$, где n – натуральное число. Докажите, что количество горизонтальных или количество вертикальных полосок делится на n. (*А. Грибалко*)

94. В прямоугольном треугольнике ABC биссектрисы AK и BL острых углов пересекаются в точке I. Перпендикуляр, опущенный из точки K на гипотенузу AB, пересекает прямую BL в точке P. Докажите, что точка I – середина отрезка PL. (*Е. Бакаев*)

95. Про числа a, b, c известно, что $4(a^2b + b^2c + c^2a) = 2(ab^2 + bc^2 + ca^2) + 7abc$. Докажите, что одно из чисел a, b, c в 2 раза больше другого. (*А. Пешнин*)

96. Диагонали четырёхугольника равны 6 и 8. Обязательно ли в нём найдётся сторона, длина которой не меньше 5? (*М. Волчкевич*)

97. На доске написано число 1. Каждую минуту к доске подходит Петя, вычитает из написанного числа его квадрат, делённый на 2022, стирает старое число и пишет на доске результат. Через сколько минут число на доске впервые станет меньше 0,5?

98. Учитель нарисовал в своей тетрадке треугольник с целочисленными сторонами и сказал об этом трём ученикам математического класса. Кроме того, каждому из них он сообщил длину одной из сторон треугольника (разным ученикам – длины разных сторон). После этого между учениками состоялся следующий разговор.

Петя: «Я знаю, это этот треугольник непрямоугольный».

Вася: «Если бы я знал, что он неравнобедренный, то знал бы все его стороны».

Толя: «Треугольник действительно неравнобедренный».

Чему равны стороны нарисованного учителем треугольника? (*А. Грибалко*)

Финал

99. Наблюдательная Настя заметила, что некоторые числа на экране калькулятора можно «прочитать» и в перевёрнутом виде (цифры изображены на рисунке, единица при переворачивании становится единицей).

а) Существует ли такое число, которое при переворачивании увеличивается на 180?

б) Какая наибольшая разность может быть между числом, записанным различными цифрами, и его «перевёртышем»?

100. У Саши было десять карточек с различными цифрами. Из части карточек он составил два числа с суммой 2020 (не переворачивая карточку с цифрой 6, чтобы получить 9, и наоборот). Какие числа мог составить Саша, если одно из них делится на другое? (*А. Шаповалов*)

101. На конференцию приехали физики и химики из Аргентины, математики и физики из Уругвая и химики из Парагвая. Всего было 100 участников. Организатор записал, что более 30 из них – математики, более 50 – аргентинцы, более 15 – уругвайцы и более 25 – парагвайцы. Не ошибся ли он?

102. В турнире матбоёв участвовали $2n$ команд, которые в каждом туре разбивались на пары. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. После n туров оказалось, что у команды «Середнячки» побед и поражений поровну. Докажите, что у каких-то двух команд в этот момент было поровну очков, если **а**) $n = 10$; **б**) n – произвольное натуральное число. (*А. Грибалко*)

103. Имеется **а**) 111 палочек, длины которых равны 1, 2, …, 111; **б**) 76 палочек, длины которых равны 25, 26, …, 100. Их выкладывают по кругу в некотором порядке. Обязательно ли найдутся три лежащие подряд палочки, из которых можно сложить треугольник? (*А. Шаповалов*)

104. В ряд растут 77 кувшинок. На каждой кувшинке, кроме самой правой, сидела лягушка. Все лягушки по очереди прыгнули по одному разу. Каждый прыжок был на свободную кувшинку, и все лягушки перепрыгнули через различное число кувшинок. С какой кувшинки и в какую сторону был последний прыжок? (*А. Шаповалов*)

105. **а**) Торт имеет форму квадрата со стороной 7 дюймов. У Майкла есть две квадратные коробки размером 5×5 дюймов каждая. Он хочет разрезать торт на несколько частей, которые можно было бы уложить в эти коробки. Разрезы он делает параллельно краям торта и куски выкладывает так, чтобы их стороны были параллельны краям коробок. На какое наименьшее число частей Майклу придётся разрезать торт?

б) Та же задача для торта 8×8 дюймов, который нужно уложить в коробки размером 4×4 дюйма и 7×7 дюймов.

в) Та же задача для торта 13×13 дюймов, который нужно уложить в коробки размером 7×7 дюймов и 11×11 дюймов. (*А. Грибалко*)

106. **а**) На конкурсе капитанов предложили написать число, состоящее только из цифр 1, 3, 9 (все три цифры должны присутствовать), с таким свойством: если заменить в нём на пробелы все цифры 1, то все оставшиеся куски будут однозначными, если заменить все цифры 3 – трёхзначными, а если заменить все цифры 9 – девятизначными. Оба капитана решили задачу. Обязательно ли они придумали одно и то же число?

б) Назовём число возмутительным, если оно состоит только из цифр 3, 4, 7 (все три цифры присутствуют) и обладает следующим свойством: если заменить в нём на пробелы все цифры 3, то все оставшиеся куски будут трёхзначными, если заменить все цифры 4 – четырёхзначными, а если заменить все цифры 7 – семизначными. Существует ли хотя бы одно возмутительное число?

в) В условиях пункта б) сколько всего существует возмутительных чисел? (*А. Шаповалов*)

107. На острове живут два племени: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. В каждую клетку квадрата **а**) 6×6; **б**) 10×10 встал один из жителей острова, после чего каждый сделал два заявления: «Все, кто со мной в одной строке, из одного племени» и «Все, кто со мной в одном столбце, из одного племени». При каком наибольшем k можно гарантированно найти квадрат $k \times k$, в котором все люди из одного племени? (*А. Пешнин*)

108. В нескольких кошельках лежат одинаковые суммы денег. Если бы количество кошельков было на 1% меньше, а денег в каждом кошельке – на копейку больше, то общая сумма денег была бы меньше. Если бы, наоборот, количество кошельков было больше на 1%, а денег в каждом кошельке – на копейку меньше, то общая сумма денег также была бы меньше. Во сколько раз увеличится общая сумма денег, если количество кошельков не менять, но в каждый кошелёк добавить по рублю?

109. В треугольнике ABC серединный перпендикуляр к стороне AC проходит через её середину M и пересекает сторону BC в точке N. Высота треугольника AH делит отрезок MN пополам. В каком отношении прямая MN делит отрезок AH? (*А. Пешнин*)

110. Мама написала на доске числа 1 и 2022. За один ход Ада стирает оба числа и пишет вместо них два целых числа, произведение которых равно одному из стёртых. За каждую новую пару чисел мама даёт Аде конфету. Но если мама увидит пару чисел, которая уже была раньше, то больше ни одной конфеты не даст. Какое наибольшее количество конфет может получить Ада? (*А. Вальтман*)

111. Каждая грань кубика Рубика оклеена девятью одинаковыми квадратиками. С каждой грани один из квадратиков потерялся. Докажите, что оставшиеся квадратики можно переклеить на поверхности кубика так, чтобы никакие два из них не имели общих точек. Квадратики можно перегибать через рёбра кубика и располагать косо.

(*А. Грибалко*)

112. В каждой клетке таблицы 11×22 живёт гном. Каждые два гнома, живущие в одной строке или в одном столбце, дружат. В некоторый момент каждый гном поссорился с двумя своими друзьями. Докажите, что теперь найдутся два гнома, у которых нет общих друзей. (*А. Грибалко*)

113. На медиане BM треугольника ABC выбрана точка K так, что $AK = AM$. Известно, что $\angle ABM = 2\angle CBM$. Докажите, что $AB = MK$. (*Е. Бакаев*)

114. При каких N найдётся треугольник, который можно разрезать на N прямоугольных треугольников с гипотенузой 1? (*А. Шаповалов*)

115. На доске написаны натуральные числа $n-1$, n, $n+1$. Каждую минуту Александр Давидович стирает какие-то два числа a и b и пишет вместо них $2a-b$ и $2b-a$. При каких n он сможет через некоторое время получить на доске два нуля (и ещё какое-то число)?

116. Даны упорядоченные по возрастанию натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Докажите неравенство $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{\text{НОК}(a_1, a_2)} + \ldots + \dfrac{1}{\text{НОК}(a_1, a_2, \ldots, a_n)} < 2$.

117. Восемь преподавателей с плохой памятью на лица привезли на турнир матбоёв 27 школьников. Любые трое преподавателей могут, объединившись, идентифицировать всех этих школьников. Докажите, что какие-то двое из них тоже справятся с этим.

118. Вписанная окружность треугольника ABC с углом B, равным 60°, касается сторон AB и CB в точках A_0 и C_0 соответственно. Биссектрисы углов A и C пересекают (первый раз) вписанную окружность треугольника в точках A_1 и C_1 соответственно. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников AA_0A_1 и CC_0C_1 равноудалены от середины стороны AC. (*Д. Швецов*)

Источник: http://tursavin.ru