V турнир математических боёв имени А.П. Савина

Лечебно-оздоровительный комплекс «Приморский хуторок»
Ярославская область
27 июня - 4 июля 1999 года

Личная олимпиада

1. В школьной олимпиаде по математике участвовали 100 человек, по физике – 50, по информатике – 48. Ровно в двух олимпиадах участвовало вдвое меньше учеников, чем в одной, а в трёх – втрое меньше, чем в одной. Сколько учеников участвовало хотя бы в одной олимпиаде? (*А. Шаповалов*)

2. Решите «животноводческий» ребус $Б + БЕЕЕ = МУУУ$. (*И. Акулич*)

3. Является ли разность $11111112222222 - 3333333$ квадратом натурального числа? (*Д. Мамедьяров*)

4. Можно ли куб $2 \times 2 \times 2$ оклеить в один слой четырьмя одинаковыми развёртками куба $1 \times 1 \times 1$? (*С. Токарев*)

5. Назовём число удачным, если его цифры идут в невозрастающем порядке и каждая цифра равна количеству различных цифр, меньших её и входящих в запись этого числа. Сколько всего удачных десятизначных чисел? (*С. Токарев*)

6. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяли такие точки M и N, что $AM = AC$ и $BN = BC$. Затем на катетах AC и BC отметили соответственно точки P и Q так, что $AP = AN$ и $BQ = BM$. Докажите, что точки C, M, N, P и Q лежат на одной окружности. (*В. Произволов*)

7. Три мухи в полдень сели на часовую, минутную и секундную стрелки часов и поехали на них. Когда какая-то стрелка обгоняла другую, сидящие на этих стрелках мухи менялись местами (а если бы секундная стрелка обогнала часовую и минутную стрелки одновременно, то местами поменялись бы мухи с часовой и секундной). Сколько кругов проехала каждая из мух до полуночи? (*С. Волчёнков*)

Математические бои

1 тур

8. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принёс с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста – король и герцог – были с ног до головы закиданы припасами, причём на долю каждого пришлось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление? (*И. Акулич*)

9. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки K и L, а на стороне AC – точки M и N так, что прямая KL параллельна AC, $AK = KM$, $NL = LC$. Докажите, что прямая AC перпендикулярна BP, где P – точка пересечения прямых KM и LN. (*С. Волчёнков*)

10. На плоскости отмечено несколько точек. Назовём их точками первого поколения. Соединим каждые две из них отрезком и назовём середины этих отрезков точками второго поколения. Таким же образом, соединив отрезками все точки второго поколения, получим точки третьего поколения, потом – четвёртого и так далее. Докажите, что если ни во втором, ни в третьем поколениях никакую точку мы не отмечали дважды, то и ни в каком следующем поколении никакую точку не придётся отмечать дважды. (*И. Акулич*)

11. Изобретатель создал чертёжный прибор, который отмечает середину любого заданного отрезка. Можно ли с помощью этого прибора и линейки разделить данный отрезок на три равные части? (*И. Акулич*)

12. Существуют ли такие натуральные числа x и y, что $x + y + \text{НОД}(x, y) + \text{НОК}(x, y) = 1999$? (*Р. Женодаров*)

13. Можно ли на поверхность куба наклеить без наложений прямоугольник так, чтобы он закрыл ровно половину каждой грани? (*Д. Калинин*)

14. Продавец ювелирного магазина решил убедиться, что десять бриллиантов, расположенных на витрине в ряд и весящих 90, 91, …, 99 каратов, действительно расположены в порядке возрастания масс. За какое наименьшее число взвешиваний на электронных весах, выдерживающих не более 200 каратов, он может это сделать? (*А. Шаповалов*)

15. В одном из 1000 окопов, расположенных в ряд, спрятался пехотинец. Автоматическая пушка может одним выстрелом «накрыть» любой окоп. В каждом промежутке между выстрелами пехотинец (если уцелел) обязательно перебегает в соседний окоп (быть может, только что обстрелянный). Сможет ли пушка наверняка попасть в пехотинца? (*А. Шаповалов, В. Шорин*)

2 тур

16. У каждого из нескольких сплетников есть три знакомых сплетника, причём с одним из них он обменивается всеми новостями каждое утро, с другим – каждый полдень, с третьим – каждый вечер. Два сплетника поссорились и прекратили обмен новостями. Докажите, что новости от каждого из них всё равно будут доходить до другого. (*В. Дольников*)

17. Найдите все целые числа k, которые можно представить в виде $k = \dfrac{x - \frac{1}{x}}{y - \frac{1}{y}}$, где x и y также целые. (*В. Сендеров*)

18. В конференции участвовали 100 человек – химики и алхимики. Каждому был задан вопрос: «Если не считать вас, то кого больше среди остальных участников – химиков или алхимиков?». Когда опросили 51 участника, и все ответили, что алхимиков больше, опрос прервался. Химики всегда говорят правду, а алхимики всегда врут. Сколько химиков среди участников конференции? (*А. Шаповалов*)

19. На каждой стороне треугольника отметили по точке и соединили эти точки отрезками, тем самым разбив треугольник на четыре меньших треугольника. Все четыре оказались подобны друг другу. Обязательно ли эти четыре треугольника равны? (*А. Шаповалов*)

20. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ прямые, проходящие через вершины B и D перпендикулярно соответственно диагоналям AC и CE, пересекаются в точке F. Докажите, что $AF = FE$ тогда и только тогда, когда $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DE^2$. (*Д. Калинин*)

21. Докажите, что в натуральном ряду, начиная с некоторого места, все числа обладают следующим свойством: между цифрами их десятичной записи можно расставить скобки и знаки четырёх арифметических действий так, чтобы результат равнялся нулю. Между каждыми двумя цифрами должен быть знак действия или скобка: образовывать из подряд стоящих цифр многозначные числа нельзя. (*А. Шаповалов*)

22. При каком наименьшем n на клетчатой доске 10×10 можно так расположить n прямоугольников размерами 1×1, 1×2, …, $1 \times n$, что на доске не окажется места для прямоугольника размером $1 \times (n + 1)$? Стороны прямоугольников идут по сторонам клеток. (*Д. Калинин*)

23. Докажите, что если n – натуральное число, большее 1, то $2^{s(n)} < n^3$, где $s(n)$ – сумма цифр числа n. (*С. Волчёнков*)

3 тур

24. Решите в натуральных числах уравнение $\dfrac{x!+1999}{y!+999} = z!$. (*И. Акулич*)

25. Пять вершин правильного 110-угольника покрасили в красный цвет, а некоторые другие 11 его вершин – в синий цвет так, что красные точки оказались вершинами правильного пятиугольника, а синие – вершинами правильного 11-угольника. Докажите, что у 110-угольника есть сторона, обе вершины которой окрашены. (*В. Произволов*)

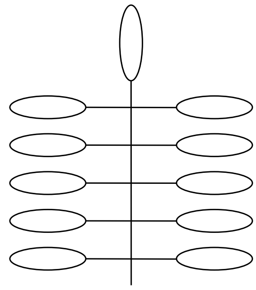
26. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взяты такие точки M и N, что $AM = AC$ и $BN = BC$. Докажите, что $MN^2 = 2AN \cdot BM$. (*Д. Калинин*)

27. На плоскости построили 1999 лучей с общей вершиной, никакие два из которых не образуют развёрнутый угол. Могут ли эти лучи образовывать острых углов столько же, сколько и тупых? (*Д. Калинин*)

28. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли такие точки E и F соответственно, что отрезок EF делит площадь треугольника пополам. Затем на этих же сторонах отметили соответственно точки M и N так, что $AM = BE$ и $FN = FC$. Докажите, что прямые AC и MN параллельны. (*Д. Калинин*)

29. Сложили все натуральные числа, меньшие 1000000, сумма цифр каждого из которых кратна 17. Докажите, что полученная сумма делится на 17. (*А. Шаповалов*)

30. Ветка кустарника (см. рисунок) имеет один лист сверху и, кроме того, n пар листьев (листья одной пары растут из одной точки стебля). Двое по очереди срывают листья. За один ход можно сорвать либо один любой лист, либо любую пару листьев, растущих из одной точки. Выигрывает тот, кто сорвёт последний лист. При каких n побеждает начинающий, а при каких – его противник, если оба играют наилучшим образом? (*И. Акулич*)



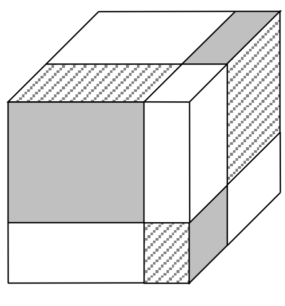
31. Любую клетку шахматной доски разрешено либо распилить по одной из двух её диагоналей, либо распилить по обеим диагоналям, либо не распиливать вообще. Какое наибольшее число распилов можно сделать так, чтобы доска не распалась на части? (*И. Акулич*)

4 тур

32. Было восемь гирь массами 1 г, 2 г, …, 8 г без надписей. Известно, что чем больше масса гири, тем больше её размер. Одну из гирь потеряли. Как за два взвешивания на чашечных весах выяснить, какая именно гиря потеряна? (*А. Шаповалов*)

33. По кругу написаны n чисел, при этом каждые два соседних числа отличаются на 1. Назовём число значительным (незначительным), если оба его соседа меньше (больше) него. Сумма всех значительных чисел равна M, а сумма всех незначительных чисел равна m. Докажите, что $n = 2(M - m)$. (*В. Произволов*)

34. Три плоскости, параллельные граням куба, разрезали каждую грань на четыре прямоугольника, как показано на рисунке. Докажите, что сумма площадей трёх закрашенных прямоугольников равна сумме площадей трёх заштрихованных прямоугольников. (*В. Произволов*)



35. Может ли замкнутая ломаная пересекать каждое своё звено ровно один раз, причём под прямым углом? (*А. Шаповалов*)

36. Из 1998 дробей $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{1998}$ составили всевозможные произведения по три. Затем эти произведения просуммировали, привели к общему знаменателю и полученную дробь преобразовали к несократимому виду. Докажите, что числитель полученной дроби кратен 1999. (*И. Акулич*)

37. На стене висит круглая мишень диаметром 10 см, закрытая квадратным листом бумаги размером 2×2 м. Ковбой хочет поразить мишень, имея 12 пуль. После каждого выстрела, начиная со второго, ему сообщают, точнее или нет был этот выстрел по отношению к предыдущему. Докажите, что ковбой сможет наверняка попасть в мишень. (*С. Волчёнков*)

38. Числа a, b и $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ рациональны, а число $\sqrt[3]{a}$ иррационально. Докажите, что $a+b=0$. (*В. Сендеров*)

39. Перед турниром 16 командам были присвоены различные рейтинги от 1 до 16. Затем среди этих команд был проведён чемпионат по олимпийской системе с выбыванием (после первого тура осталось восемь команд, после второго – четыре, потом две и, наконец, одна). Каждую встречу выигрывала команда с лучшим рейтингом. Назовём встречу неинтересной, если разница рейтингов команд была больше 4. Какое наименьшее число неинтересных встреч могло быть в турнире? (*А. Шаповалов*)

Финал

40. Последовательность начинается с чисел 9, 9, 9, 9. Каждый следующий член последовательности равен остатку от деления на 11 произведения четырёх предыдущих членов. Встретится ли в этой последовательности такая четвёрка идущих подряд чисел: 1, 9, 9, 9? (*С. Волчёнков*)

41. В трапеции $ABCD$ основание BC вдвое короче основания AD, но втрое длиннее отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой основания AD. Докажите, что $AB^2+CD^2=BC^2$. (*А. Шаповалов*)

42. Докажите, что если $a^4b^3+b^4c^3+c^4a^3=a^3b^4+b^3c^4+c^3a^4$, то $(a-b)(b-c)(c-a)=0$. (*В. Произволов*)

43. Числами от 1 до 100 сверху вниз пронумеровали 100 карточек в стопке. Двое играющих по очереди снимают сверху по одной или несколько карточек и отдают противнику. Выигрывает тот, у кого первого произведение номеров карточек станет кратно 1000000. Кто из игроков может гарантировать себе выигрыш? (*А. Шаповалов*)

44. Некоторые клетки доски $n\times n$ заминированы. Для каждой клетки (как заминированной, так и незаминированной) известно, сколько клеток, соседних с ней по стороне, заминировано. При каких n этой информации в любом случае достаточно для вычисления количества заминированных клеток? (*Д. Калинин*)

45. Назовём точку, расположенную внутри треугольника, плохой, если из отрезков, соединяющих её с вершинами треугольника, нельзя составить треугольник. Какие треугольники не имеют плохих точек? (*И. Акулич*)

46. Петя хочет найти на магнитофонной записи часового концерта определённый момент (точку на ленте). Магнитофон может перематывать ленту в обе стороны со скоростью, в 10 раз большей, чем скорость ленты при прослушивании. Петя заранее не знает, где нужное место, но, прослушав полминуты подряд, он либо обнаруживает нужный момент, либо определяет, раньше этот момент или позже. Вначале лента стоит на начале концерта. Может ли Петя гарантированно найти момент менее чем за 10 минут? (*А. Шаповалов*)

47. На шахматной доске, первоначально пустой, расставляются ферзи по следующим правилам: каждым ходом на доску ставится один ферзь, и если он побил какого-то ферзя, то один из побитых им ферзей снимается с доски. Какое наибольшее число ферзей можно расставить на доске, соблюдая эти условия? (*И. Акулич*)

48. На контурной карте несколько государств имеют форму равных прямоугольников. При каком наименьшем количестве государств для правильной раскраски (то есть такой, при которой каждые два государства, имеющие общий участок границы, раскрашены разными цветами) может не хватить трёх цветов? (*С. Волчёнков*)

49. В стране фараонов одинаковыми монетами любого достоинства можно набрать сумму ровно в один динар, причём для этого всегда нужно менее 100 монет. Барон Мюнхгаузен привёз оттуда семь монет разных достоинств и утверждает, что они как раз составляют сумму в один динар. Могут ли слова барона быть правдой? (*А. Шаповалов*)

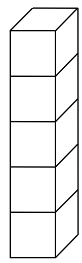
50. Строки и столбцы таблицы 9×9 пронумерованы числами от 2 до 10, и в каждую клетку записано произведение номера строки на номер столбца, в которых она расположена. Несколько строк и столбцов вычеркнули. Может ли сумма оставшихся чисел оказаться простым числом? (*И. Акулич*)

51. Первый член последовательности равен 1, второй равен 2, а каждый следующий получен из предыдущего прибавлением его наибольшего простого делителя ($2+2=4$, $4+2=6$, $6+3=9$, $\ldots$). Найдите 3999-й член этой последовательности. (*А. Шаповалов*)

52. Мультфильм показывали целое число минут. Когда посмотрели в программе время начала и конца показа (по 24-часовой шкале), то оказалось, что в записи использованы восемь различных цифр. Какое наименьшее время мог идти мультфильм? (*А. Шаповалов*)

53. Существует ли треугольник, длины всех сторон и всех высот которого целые? (*А. Шаповалов*)

54. Какие 500 последовательных натуральных чисел надо выписать, чтобы всего было выписано 1999 цифр? (*Д. Калинин*)



55. Пять обычных игральных кубиков сложили в столбик, как показано на рисунке, и подсчитали сумму чисел на всех видимых гранях. Когда верхний кубик убрали, сумма чисел на видимых гранях оставшегося столбика оказалась на 19 меньше. Какое число стоит на верхней грани нового столбика? (*Д. Калинин*)

56. Сумма длин медиан треугольника равна сумме длин его биссектрис. Докажите, что треугольник равносторонний. (*А. Спивак*)

Источник: http://tursavin.ru