X турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2004 года

Личная олимпиада

1. Гриша купил на базаре красные и синие шарики – всего десять штук. Если бы он купил десять красных шариков, то потратил бы на 21 рубль меньше, а если бы купил десять синих шариков, то на 9 рублей больше. На сколько синий шарик дороже красного? (*Д. Калинин*)

2. Семь монет расположены по кругу. Известно, что какие-то четыре из них, идущие подряд, фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Как за одно взвешивание на чашечных весах без гирь найти две фальшивые монеты? (*А. Малеев*)

3. Могут ли шесть футболистов расположиться на поле так, чтобы каждый из них имел возможность сделать прямолинейную передачу по земле ровно четырём другим? (*Г. Гальперин, В. Сендеров*)

4. Каких натуральных чисел от 1 до 1000000 больше: чётных с нечётной суммой цифр или нечётных с чётной суммой цифр? (*А. Зайчик*)

5. Сколько существует групп из девяти последовательных четырёхзначных чисел, в которых первое число делится на 10, второе – на 9, …, девятое – на 2? (*В. Брагин*)

6. Несколько клеток шахматной доски покрашено. Далее многократно выполняется следующая операция: выбирается линия (горизонталь или вертикаль), в которой более половины клеток уже покрашены, и окрашиваются все клетки этой линии. Какое наименьшее количество клеток должно быть покрашено первоначально, чтобы такими операциями можно было покрасить всю доску? (*Д. Калинин*)

7. Какое наибольшее количество чёрных шашек может съесть за один ход белая шашка на шахматной доске? В дамку шашка не превращается. (*А. Канель-Белов*)

8. Бильярдный стол имеет форму прямоугольного треугольника. Из точки на гипотенузе перпендикулярно ей выпустили шар, который отразился от двух бортов (по закону «угол падения равен углу отражения») и вернулся на гипотенузу. Докажите, что длина такого пути не зависит от точки старта. (*Д. Калинин*)

9. С крыши дома на землю спущена лестница. На каждой её ступеньке находится указатель, направленный либо вверх, либо вниз. На одной из ступенек стоит человек. В соответствии с направлением указателя он переходит на одну из соседних ступенек. С этой ступеньки он переходит на соседнюю с ней по направлению её указателя и так далее. Как только человек покидает какую-либо ступеньку, её указатель меняет направление на противоположное. Докажите, что рано или поздно человек либо сойдёт на землю, либо попадёт на крышу. (*И. Акулич*)

10. Дан треугольник ABC. Постройте такой параллелограмм $KLMN$, что вершины K и N лежат на стороне BC, вершина L – на стороне AB, вершина M – на стороне AC и диагонали параллелограмма параллельны сторонам AB и AC. (*Д. Калинин*)

11. Известно, что $a = x + y + \sqrt{xy}$, $b = y + z + \sqrt{yz}$, $c = z + x + \sqrt{zx}$, где $x, y, z > 0$. Докажите, что $a + b + \sqrt{ab} > c$. (*В. Сендеров*)

12. Обозначим через $d(N)$ количество делителей натурального числа N. Известно, что в последовательности N, $d(N)$, $d(d(N))$, … нет точных квадратов. Найдите все такие N. (*Б. Френкин*)

13. Существует ли такое число, которое можно представить в виде a^2+ab+b^2, где a и b – целые неотрицательные числа, однако нельзя представить в виде c^2-cd+d^2, где c и d – также целые неотрицательные числа? (*А. Спивак*)

14. Из шахматной доски вырезали центральный квадрат 4×4. Можно ли оставшуюся часть доски обойти ходом шахматного коня, побывав на каждой клетке ровно по одному разу? (*А. Хачатурян*)

15. Покажите, как можно покрыть прямоугольный стол размером 1×2 в два слоя пятью одинаковыми квадратными салфетками площади $\frac{4}{5}$. Салфетки разрешается перегибать.

(*В. Произволов*)

Командная олимпиада

16. Можно ли расставить по кругу все натуральные числа от 1 до 25 так, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была точным квадратом? (*В. Сендеров*)

17. Две окружности касаются друг друга в точке C и прямой l в точках A и B. Прямая AC повторно пересекает вторую окружность в точке D. Докажите, что угол ABD прямой. (*А. Заславский*)

18. Сколько существует прямоугольников с целочисленными сторонами, площадь каждого из которых на 2004 больше его периметра? (*С. Иванов*)

19. В ряд выложили сначала дукаты, а за ними цукаты – всего десять штук. Каждый дукат весит 7 г, а каждый цукат – 8 г, но по внешнему виду они не отличаются. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь отделить дукаты от цукатов?

20. Решите в целых числах уравнение $2^x=3y^2+1$. (*В. Сендеров*)

21. В неравностороннем треугольнике ABC точка, симметричная точке пересечения медиан относительно стороны BC, лежит на описанной окружности. Докажите, что $\angle BAC<60°$. (*В. Сендеров*)

22. Сумма положительных чисел x, y, z, t равна 1. Докажите неравенство

$(1-x)(1-y)(1-z)(1-t)-xyzt\le\frac{5}{16}$. (*В. Сендеров*)

23. На кольцевой шнур нанизана связка колец разного размера с номерами от 1 до N по порядку. Если номера колец отличаются на 2 или больше, их можно поменять местами, продев одно в другое. Кольца с соседними номерами так поменять нельзя. Докажите, что кольца можно расположить в любом порядке. (*А. Шаповалов*)

Первый тур

24. В словах ВОДА и СОДА одинаковые буквы заменили одинаковыми цифрами, а разные – разными. Может ли сумма полученных чисел быть палиндромом? (*А. Зайчик*)

25. **а**) Имеется десять пустых мешков. Петя разложил 1000 орехов по трём из этих мешков. Далее он многократно выполняет следующую операцию: из мешка, в котором больше всего орехов (или из одного из них, если таких мешков несколько), вынимает девять орехов и раскладывает по одному в каждый из остальных мешков. Может ли во всех мешках оказаться поровну орехов?

б) В десяти мешках лежат 1000 орехов, причём во всех мешках количество орехов разное. Далее многократно выполняется следующая операция: из мешка, в котором больше всего орехов (или из одного из них, если таких мешков несколько), вынимаются девять орехов и раскладываются по одному в каждый из остальных мешков. Докажите, что наступит момент, когда в каких-то двух мешках орехов станет поровну. (*И. Акулич*)

26. Каждая грань куба разбита на девять одинаковых квадратов. Назовём соседями квадраты, имеющие по крайней мере одну общую вершину. В каждом квадрате написали неотрицательное число. Оказалось, что для каждого квадрата сумма чисел, написанных в нём и во всех его соседях, одна и та же.

а) Приведите пример такой расстановки, в которой использовано не менее четырёх различных чисел.

б) Петя записал, сколько раз встретилось каждое из чисел. Какое наименьшее значение может принимать самое большое из записанных им чисел? (*И. Акулич*)

27. **а**) На столе лежит стопка из 13 тетрадей. Разрешается разделить стопку на три части: верхнюю, среднюю и нижнюю (каждая часть должна содержать хотя бы одну тетрадь), а затем поменять местами верхнюю и нижнюю стопки, не переворачивая их. Можно ли с помощью нескольких таких операций расположить тетради в обратном порядке?

б) В условиях пункта а) для стопки из n тетрадей при каких $n > 2$ с помощью нескольких таких операций можно расположить тетради в любом порядке? (*И. Акулич*)

28. Существует ли восьмизначное число, являющееся точным квадратом, цифры которого идут в возрастающем порядке? (*И. Комахин*)

29. Сотрудники фирмы «Bank of New Vasyuki» расселись по кругу. Некоторые из них всегда говорят правду, а остальные всегда врут. У каждого спросили: «Сколько среди твоих соседей честных людей?» Только от одного был получен ответ «Один», остальные сказали, что среди их соседей честных нет. На другой вопрос «Есть ли среди твоих соседей лжецы?» все ответили утвердительно. Можно ли по этим ответам определить, кто из сотрудников фирмы честен, а кто – нет? (*И. Гагуа*)

30. Фигура пулемётчик – это ладья, бьющая только в одном из четырёх направлений. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга пулемётчиков можно расставить на шахматной доске? (*В. Трушков*)

31. Сколько имеется несократимых дробей с числителем 2003, меньших $\frac{1}{2003}$ и больших $\frac{1}{2004}$?

32. Решите в положительных числах систему уравнений $\begin{cases} x^3 - xyz = -5, \\ y^3 - xyz = 2, \\ z^3 - xyz = 21. \end{cases}$ (*В. Сендеров*)

33. На стороне BC квадрата $ABCD$ взята точка M, а на стороне CD – точка N так, что $\angle MAN = 45°$. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AMN лежит на диагонали AC. (*В. Произволов*)

34. Существует ли непрямоугольный треугольник, вписанный в окружность единичного радиуса, у которого сумма квадратов длин двух сторон равна 4? (*В. Сендеров*)

35. К натуральному числу $m > 2$ слева приписали число $m - 2$, а справа – число $m - 1$. В результате получилось число, равное $(m-1)^{m+1}$. Чему равно m? (*А. Жуков*)

36. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы каждая из них угрожала нечётному количеству остальных? (*И. Акулич*)

37. Правильный шестиугольник со стороной 1 разрезан произвольным образом на равносторонние треугольники, в каждый из которых вписан круг. Найдите сумму площадей этих кругов. (*В. Произволов*)

38. Три положительных числа x, y, z таковы, что $x^2+y^2+z^2=3$. Докажите неравенство $\frac{1}{xy+1}+\frac{1}{yz+1}+\frac{1}{zx+1}\geq\frac{3}{2}$. (*И. Воронович*)

39. Даны числа $A=9^{9^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{9}}}}}$ и $B=8^{8^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{8}}}}}$, где количество девяток равно m, а количество восьмёрок равно n. Найдите все такие m и n, для которых разность $A-B$ делится на 7. (*Г. Гальперин*)

Второй тур

40. В турнире матбоёв участвовали **а**) восемь команд; **б**) 26 команд. После нескольких туров оказалось, что среди каждых четырёх команд было проведено не более двух боёв. Докажите, что жюри может составить расписание боёв на следующий тур так, чтобы играли все команды и не было повторных боёв. (*С. Волчёнков, А. Малеев*)

41. **а**) Три девочки раскрашивают клетчатый лист 2004×2004. Ходят по очереди: первой – Надя, второй – Аня, третьей – Света, затем снова Надя и так далее. За один ход можно закрасить квадрат 1×1 или 2×2. Дважды закрашивать одну клетку нельзя. Выигрывает та девочка, которая закрасит последнюю клетку. Кто может выиграть, как бы ни играли соперницы?

б) Та же задача, но за один ход можно закрасить квадрат 1×1, 2×2 или 4×4.

в) Та же задача, но за один ход можно закрасить квадрат, сторона которого равна любой неотрицательной степени двойки. (*Д. Калинин*)

42. По окружности стоит несколько (более четырёх) положительных чисел. Каждое из них равно либо сумме, либо разности своих соседей. Докажите, что найдутся две пары чисел с равной суммой. (*М. Макаров*)

43. Найдите наибольшее трёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на произведение своих цифр. (*А. Зайчик*)

44. **а**) В области десять дорог. Каждая дорога ведёт из одного города в другой, при этом из каждого города можно доехать в любой другой (возможно, через промежуточные города). Губернатор решил отремонтировать все дороги, организовав для этого три бригады. Он хочет, чтобы каждая бригада отремонтировала не менее трёх дорог, причём по всем своим дорогам каждая бригада должна уметь передвигаться, не пользуясь чужими дорогами. Для любой ли схемы дорог бригады могут справиться с поставленной задачей?

б) В области 34 дороги. Каждая дорога ведёт из одного города в другой, при этом из каждого города можно доехать в любой другой (возможно, через промежуточные города). Губернатор решил отремонтировать все дороги, организовав для этого N бригад. Он хочет, чтобы каждая бригада отремонтировала одно и то же количество дорог, причём по всем своим дорогам каждая бригада должна уметь передвигаться, не пользуясь чужими дорогами. При каких N это возможно для любой схемы дорог?

в) Та же задача для области, в которой 102 дороги. (*С. Волчёнков*)

45. У продавца есть три сорта зелёного чая. Петя купил по несколько граммов каждого сорта. Продавец заметил, что какие бы два ценника он ни поменял местами, Пете пришлось бы заплатить больше. Может ли такое быть или продавец ошибается?

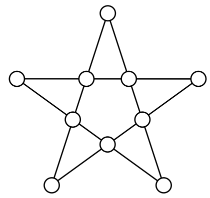
46. Разрежьте клетчатый квадрат 6×6 на четыре равные части по границам клеток так, чтобы ни одну из них нельзя было сдвинуть, не задев другие части.

47. На листке бумаги написано несколько целых чисел, среди которых нет ни единицы, ни минус единицы. Петя утверждает, что для каждого написанного числа найдётся такое другое число среди написанных, что отношение первого ко второму тоже написано на листке. Может ли Петя быть прав? (*М. Макаров*)

48. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены соответственно точки D и E так, что $AD = 2BE$. Точка F симметрична точке D относительно точки E. Докажите, что угол ACF прямой.

49. Точки I и I' – центры вписанных окружностей треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно. Следует ли из равенств $AI = A'I'$, $BI = B'I'$, $CI = C'I'$ равенство треугольников ABC и $A'B'C'$? (*В. Сендеров*)

50. В каждом из десяти узлов пятиконечной звёздочки (см. рисунок) лежит по монете. Среди них четыре фальшивых – они на 1 г легче настоящих и лежат на одном отрезке. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах со стрелкой, показывающих, какая чаша тяжелее и на сколько граммов, найти все фальшивые монеты? (*И. Николаева*)



51. В клетках таблицы 5×5 расставлены натуральные числа от 1 до 25. Для каждой пары чисел, стоящих в одной строке или в одном столбце, вычислили их сумму. Пусть A – наибольший, а B – наименьший из полученных результатов. Найдите наименьшее значение разности $A - B$ по всем возможным расстановкам чисел в таблице. (*С. Волчёнков*)

52. **а**) Докажите тождество

$$\frac{4x^2}{2x+y+z}+\frac{4y^2}{x+2y+z}+\frac{4z^2}{x+y+2z}=\frac{(y+z)^2}{2x+y+z}+\frac{(z+x)^2}{x+2y+z}+\frac{(x+y)^2}{x+y+2z}.$$

б) Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство

$$\frac{x^2}{2x+y+z}+\frac{y^2}{x+2y+z}+\frac{z^2}{x+y+2z}\geq\frac{yz}{2x+y+z}+\frac{zx}{x+2y+z}+\frac{xy}{x+y+2z}.$$

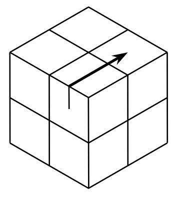
(*Д. Калинин*)

53. Из точки A_1 на стороне BC треугольника ABC опустили перпендикуляры A_1D и A_1E на стороны AB и CA. Оказалось, что прямые BC и DE параллельны. Пусть B_1 и C_1 – аналогичные точки на сторонах CA и AB соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке. (*Д. Калинин*)

54. Найдите все возрастающие последовательности натуральных чисел a_1, a_2, …, в которых $a_2 = 2$ и $a_{mn} = a_m a_n$ для любых натуральных m и n. (*В. Сендеров*)

Третий тур

55. Каждая грань кубика разбита на четыре клетки. За один ход можно перескочить с клетки на клетку через одну (см. рисунок) в любом из четырёх направлений. Можно ли обойти таким образом все клетки, побывав в каждой ровно по одному разу? (*Д. Калинин*)



56. С натуральным числом можно выполнять следующие операции:

1) приписать справа «0»;

2) приписать справа «4»;

3) разделить на 2.

С помощью данных операций получите из 1 число 2004.

57. Иван Царевич в поисках Жар-птицы попал на остров Контрастов, на котором живут рыцари, которые всегда говорят правду, лжецы, которые всегда врут, и дипломаты, которые чередуют правдивые и лживые высказывания (начать могут с любого). На острове два города: Белый и Чёрный. Подъезжая к развилке, Иван заметил трёх местных жителей А, Б и В, каждый из которых заявил двум другим: «Вы оба – лжецы!» Иван спросил у них, в каком из городов ему следует искать Жар-птицу, на что были получены следующие ответы.

А: «Нужно ехать в Белый город».

В: «Да, нужно ехать в Белый город».

А: «Б иногда говорит правду».

Б: «А прав».

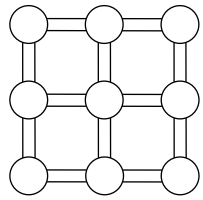
А: «Б прав».

Где живёт Жар-птица? (*И. Сидоров*)

58. Четыре одинаковые клетчатые фигуры положили на клетчатую плоскость так, что их клетки совпали с клетками плоскости. Может ли оказаться, что восемь клеток плоскости накрыты четыре раза, семь клеток – три раза, шесть клеток – два раза и пять клеток – один раз? (*Д. Калинин*)

59. Вова и Ваня били в комнате комаров. Вова бил комаров дверью, каждым своим ударом он убивал 500 комаров, но в это время в открытую дверь залетало 925 комаров. Ваня же бил комаров подушкой, одним ударом он убивал 323 комара. Известно, что они легли спать без комаров. Могло ли первоначально в комнате находиться 2004 комара? (*Е. Иванова*)

60. **а**) В подземелье графа Дракулы девять пещер в виде квадрата 3×3, соединённых туннелями (см. рисунок). Два вампира, Миша и Гриша, по очереди засыпают землёй по одному туннелю так, чтобы из каждой пещеры можно было добраться до любой другой. Миша ходит первым. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?



б) Та же задача для 16 пещер, расположенных в виде квадрата 4×4.

в) Та же задача для n^2 пещер, расположенных в виде квадрата $n\times n$, а за один ход можно засыпать один или два туннеля. (*Е. Иванова*)

61. Между двумя командами был проведён матбой, где им было предложено восемь задач. Известно, что первая команда решила три задачи, а вторая – пять задач. Каждую из решённых задач команды рассказывают на 12 баллов, при вызове на нерешённую делают проверку корректности, обе команды умеют оппонировать. Если у команды закончились решённые задачи, происходит отказ от вызова. Какая разница в счёте могла быть, если выиграла первая команда? (*Н. Чернятьев*)

62. В однокруговом шахматном турнире за победу начислялось 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0. Единоличным победителем стал Федя. Сеня сказал: «Если из турнирной таблицы удалить любого участника и вычеркнуть очки, набранные во встречах с ним, то победителем будет уже не Федя». Может ли Сеня быть прав? (*Б. Френкин*)

63. В стране 2004 города, каждые два из них соединены одной дорогой, но ГИБДД все дороги перекрыла. Начальник Гриша хочет открыть как можно больше дорог, а начальник Ваня стремится ему помешать. Какое наибольшее количество дорог может оказаться открытым после очередного приказа Гриши, если он одним приказом может открыть пять любых дорог, а Ваня последующим приказом может закрыть все дороги, выходящие из одного города? (*А. Чеботарёв*)

64. Дан параллелограмм $ABCD$. На продолжении стороны AB за точку A взяли такую точку E, что $AE = DE$. На продолжении стороны AD за точку A взяли такую точку F, что $AF = BF$. Докажите, что если прямые BD и EF параллельны, то $ABCD$ – ромб. (*Д. Калинин*)

65. В вершинах куба расставлены все натуральные числа от 1 до 8. На каждом ребре записан модуль разности чисел, стоящих в его концах. Среди чисел на рёбрах ровно три различных. Найдите наименьшее возможное значение суммы этих трёх чисел. (*В. Сендеров*)

66. **а**) Дан бесконечный в обе стороны ряд ящиков, на которых указаны номера: …, −2, −1, 0, 1, 2, … В них лежат 5764 камня. Каждую минуту разрешено выполнять следующую операцию: из ящика с номером n вытащить два камня и один из них положить в ящик с номером $n-2$, а другой – в ящик с номером $n+1$. Докажите, что через конечное количество минут выполнение операции станет невозможным, то есть в каждом ящике будет не более одного камня.

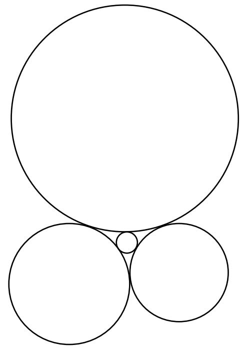
б) Докажите то же утверждение, если один из камней можно положить в любой ящик с номером от $n-5$ до $n-1$, а другой – в любой ящик с номером от $n+1$ до $n+5$.

67. Найдите все такие пары простых чисел (p, q), что $|p-q|=2$ и $|p-2^m|=|q-2^n|=1$ для некоторых целых m и n. (*В. Сендеров*)

68. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отмечены такие точки C_1, A_1, B_1 соответственно, что $BC_1=C_1A_1=A_1B_1=B_1C$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на биссектрисе угла A. (*А. Мякишев*)

69. Стрелки испорченных часов (часовая, минутная и секундная) движутся с правильными скоростями, но расположены так, что все три никогда не смогут совпасть. В произвольный момент времени рассматриваются углы между стрелками, не превосходящие 180°. Назовём наибольший из них расхождением. Докажите, что когда расхождение достигает минимума, какие-то две стрелки совпадают. (*И. Акулич*)

70. Решите в натуральных числах уравнение $(x+1)^x-x^{x+1}=1$. (*В. Сендеров*)



71. Четыре окружности с радиусами $R_1>R_2>R_3>R_4$ попарно касаются друг друга внешним образом (см. рисунок). Докажите, что $R_2>2R_4$. (*Б. Френкин*)

72. Для всех натуральных n докажите неравенство

$$\frac{1}{8(n+1)}<\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}+\frac{1}{(2n+3)(2n+4)}+\ldots+\frac{1}{(4n-1)4n}<\frac{1}{8n}.$$ (*А. Заславский*)

Финал

73. Три ненулевых числа x, y, z таковы, что $x^2-y^2=yz$ и $y^2-z^2=zx$. Докажите, что $x^2-z^2=xy$. (*А. Миротин*)

74. Можно ли при каком-нибудь натуральном $n>1$ записать в строку все натуральные числа от 1 до n в некотором порядке так, чтобы сумма каждых двух соседних чисел была точным квадратом? (*В. Сендеров*)

75. Назовём натуральное число липецким, если оно делится на каждую свою ненулевую цифру (например, число 2004 липецкое). Какое наибольшее количество последовательных чисел могут быть липецкими? (*В. Замков*)

76. В однокруговом шахматном турнире участвовали 22 игрока. За победу начислялось 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0. После завершения турнира некоторые участники были дисквалифицированы, а результаты игр с ними были аннулированы. У всех оставшихся участников до этого было разное число очков, и теперь оно у всех разное, но порядок мест сменился на противоположный. Докажите, что было дисквалифицировано не менее половины участников.
(*Б. Френкин, А. Максимов, Т. Караваева, В. Гуровиц*)

77. В остроугольном неравностороннем треугольнике ABC угол A равен 60°. Докажите, что точки B, C, ортоцентр, центры вписанной и описанной окружностей являются в некотором порядке вершинами выпуклого пятиугольника. (*В. Сендеров*)

78. На шахматной доске расставлены красные, синие и жёлтые ладьи – поровну каждого цвета. Найдите наибольшее возможное число ладей, если известно, что ладьи разного цвета не угрожают друг другу. (*И. Акулич*)

79. Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых радиусы описанных окружностей треугольников AMB, BMC и CMA равны. (*М. Волчкевич*)

80. Из листа клетчатой бумаги вырезали по линиям сетки многоугольник. Известно, что его можно разрезать на прямоугольники 1×2. Докажите, что у него есть сторона чётной длины. (*В. Гуровиц*)

81. Числа x, y, z, t лежат в интервале (0, 1). Докажите неравенство $\sqrt{x^2+(1-t)^2}+\sqrt{y^2+(1-x)^2}+\sqrt{z^2+(1-y)^2}+\sqrt{t^2+(1-z)^2}<4.$ (*С. Дворянинов*)

82. Внутри окружности отмечена точка P. На окружности выбрали точку Q и через неё провели перпендикуляр к прямой PQ. Он повторно пересёк окружность в точке R. Через неё провели перпендикуляр к прямой QR. Докажите, что все такие перпендикуляры проходят через одну точку, независимо от выбора точки Q. (*М. Панов*)

83. Пусть α, β, γ и α', β', γ' – величины углов треугольников ABC и $A'B'C'$ соответственно. Следует ли из равенств $\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}=\frac{\sin\beta}{\sin\beta'}=\frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'}$ подобие треугольников ABC и $A'B'C'$? (*И. Богданов, В. Сендеров*)

84. Выписаны первые n строк треугольника Паскаля. Докажите, что существует n, для которого более чем 99% всех выписанных чисел чётные. (*А. Канель-Белов*)

Источник: http://tursavin.ru