XII турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2006 года

Личная олимпиада

1. Три человека со стиральной машиной хотят переправиться через реку. Катер вмещает либо двух человек и стиральную машину, либо трёх человек. Беда в том, что стиральная машина тяжёлая, поэтому погрузить её в катер или вытащить из него можно только втроём. Смогут ли они переправиться? (*А. Шаповалов*)

2. Есть некоторое количество одинаковых квадратных столов. Их можно расставить для банкета либо буквой П, либо буквой Т («толщина» каждой буквы – один стол). В каком случае можно будет посадить больше гостей, то есть периметр образовавшегося банкетного стола будет больше? (*А. Блинков*)

3. Мартышка, Попугай, Удав и Слонёнок устроили концерт по случаю приезда бабушки Удава. На концерте было исполнено семь номеров, каждый из которых представлял собой либо пение вдвоём, либо танец втроём. Никакие два номера не исполнялись одним и тем же составом. Удав участвовал в исполнении одной песни и двух танцев. Мартышка исполнила больше номеров, чем Слонёнок. Сколько номеров исполнил Слонёнок? (*Е. Барабанов*)

4. Назовём 1000000-значное число кошачьим, если оно делится на произведение своих цифр. Сколько последовательных натуральных чисел могут быть кошачьими? (*В. Сендеров*)

5. Кеша вырезал из бумаги треугольник ABC с наибольшей стороной AB и перегнул его по прямой так, что вершина C попала на сторону AB и образовался четырёхугольник. Укажите множество точек на стороне AB, куда могла попасть вершина C. (*А. Шаповалов, В. Гуровиц*)

6. Клетчатая таблица 3×3 называется магическим квадратом, если числа в ней попарно различны и суммы чисел во всех строках и столбцах одинаковы (пример магического квадрата показан на рисунке). Существует ли магический квадрат, заполненный числами, обратными натуральным? (*А. Шаповалов*)

9	5	1
4	3	8
2	7	6

7. Каждому из трёх логиков написали на лбу натуральное число, причём одно из этих чисел являлось суммой двух других, и сообщили им об этом. Логик не видит, что написано у него на лбу, но видит, что написано у других. Первый логик сказал, что не может догадаться, какое число написано у него на лбу. После этого то же самое сказал второй логик, а затем и третий. Тогда первый сказал: «Я знаю, что у меня на лбу написано число 50». Какие числа написаны у двух остальных?

8. Найдите все положительные x, для которых число $\{x\}(x+[x])$ целое. Здесь $[x]$ – целая, а $\{x\}$ – дробная часть числа x. (*Л. Радзивиловский*)

9. Найдите все такие простые p и q, для которых числа p^2+q и p^2-q также простые. (*Б. Френкин*)

10. На сторонах AB, BC, CA треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на биссектрисе угла A. (*А. Мякишев*)

11. Можно ли так расположить в ряд все натуральные числа от 1 до 2006, взятые по два раза, чтобы для каждого числа разница между позициями, на которых оно встречается, была равна этому числу? (*В. Гуровиц*)

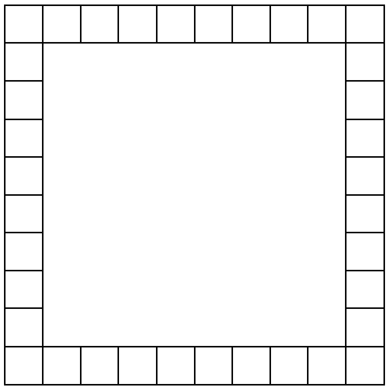
12. На доске записаны числа 1, 2, 4, …, 512. Разрешается стереть любые два числа и записать вместо них частное от деления их произведения на их сумму. Докажите, что число, которое останется на доске после девяти операций, не зависит от порядка выбора чисел, и найдите это число. (*А. Шаповалов*)

13. Имеется куча из 2006! камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход из кучи разрешается взять не менее одного камня, но не более чем $\frac{1}{2006}$ часть оставшихся в куче камней. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Гусаков*)

14. Для каких натуральных n любой треугольник можно разбить на n треугольников, имеющих по равной медиане? (*А. Шаповалов*)

Командная олимпиада и нулевой тур

15. Простые числа p, q, r таковы, что $p^2 - q^2 - r^2$ делится на 10. Найдите $q + r$. (*В. Сендеров*)



16. Клетчатую рамку 10×10 толщиной в одну клетку (см. рисунок) разрезали по границам клеток на попарно различные части и сложили из них квадрат 6×6. Каково наибольшее возможное число частей? (*А. Шаповалов*)

17. Вася разделил некоторое число на 666 и обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 200. Петя разделил то же самое число на 121 и также обнаружил, что сумма неполного частного и остатка равна 200. Найдите исходное число. (*В. Каскевич, Е. Чернышёва*)

18. Даны два треугольника. Сумма двух углов первого равна некоторому углу второго. Сумма двух других углов первого также равна некоторому углу второго. Докажите, что первый треугольник равнобедренный. (*Б. Френкин*)

19. Дети набирают в бане полные шайки воды. Сначала они включают горячий кран, потом выключают его и включают холодный. Известно, что если выключить горячий кран в тот момент, когда он загудит, соотношение горячей и холодной воды в шайке будет оптимальным. Володя выключил горячий кран на 9 секунд позже, и в итоге в его шайке оказалось горячей воды в 2 раза больше, чем холодной. Сеня выключил горячий кран на 9 секунд раньше, и в его шайке оказалось горячей и холодной воды поровну. Через сколько секунд после открытия горячего крана он загудит? (*Е. Чернышёва*)

20. Точка M – середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Пусть P – основание перпендикуляра, опущенного из точки A на биссектрису угла B, а Q – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на биссектрису угла A. Найдите углы треугольника PMQ. (*Д. Калинин*)

21. Три жулика, каждый с двумя чемоданами, хотят переправиться через реку. Есть трёхместная лодка, каждое место в которой может быть занято человеком или чемоданом. Никто из жуликов не доверит свой чемодан спутникам в своё отсутствие, но готов оставить чемоданы на безлюдном берегу (лодка, приставшая к берегу, считается частью берега). Смогут ли они переправиться? (*А. Шаповалов*)

22. На числовой прямой отмечены все целые точки. Точки x и y соединяются дугой, если $|x - y|$ – простое число. В какое наименьшее количество цветов можно покрасить все точки так, чтобы каждые две соединённые точки были разного цвета?

23. На сторонах BC, CA, AB треугольника ABC отмечены точки A_1, B_1, C_1 соответственно так, что $\frac{A_1B}{A_1C} = \frac{B_1C}{B_1A} = \frac{C_1A}{C_1B} = \alpha$, где $\alpha < 1$. На сторонах B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$ отмечены точки A_2, B_2, C_2 соответственно так, что $\frac{A_2B_1}{A_2C_1} = \frac{B_2C_1}{B_2A_1} = \frac{C_2A_1}{C_2B_1} = \frac{1}{\alpha}$. Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$ подобен треугольнику ABC.

(*И. Рудаков*)

24. Сумма неотрицательных чисел x и y не превосходит 1. Докажите неравенство $x^2 + 8x^2y^2 + y^2 \le 1$. (*В. Сендеров*)

25. Докажите, что существует бесконечно много приведённых квадратных уравнений с целыми коэффициентами, у которых один из корней равен дискриминанту.

(*А. Хачатурян*)

26. Бумажный треугольник со сторонами a, b, c перегнули по прямой так, что вершина, противолежащая стороне длины c, попала на эту сторону. Известно, что в получившемся четырёхугольнике равны два угла, примыкающие к линии сгиба. Найдите длины отрезков, на которые делит сторону попавшая туда вершина. (*А. Шаповалов*)

27. Обозначим через $S(n)$ сумму всех делителей натурального числа n. Найдите все такие n, для которых выполняется равенство $3S(n) = 4n + 79$. (*В. Трушков*)

28. Некоторые стороны и диагонали выпуклого n-угольника покрасили в красный или синий цвет. Известно, что красные отрезки не пересекаются и между каждыми двумя вершинами есть единственный путь по красным отрезкам. То же верно для синих отрезков. Найдите наименьшее возможное количество пересечений между красными и синими отрезками. (*Б. Френкин*)

29. Квадрат разрезан на равные треугольники. Обязательно ли у каждых двух треугольников найдутся параллельные стороны? (*А. Шаповалов*)

30. Дан треугольник ABC. Рассматриваются все точки P внутри него и для каждой из них строятся точки P_1, P_2, P_3, симметричные ей относительно середин сторон. Найдите геометрическое место центров описанных окружностей треугольников $P_1P_2P_3$.

(*И. Наумкин*)

31. Докажите неравенство $|x+y|^3 + |x-y|^3 \ge 2(|x|^3 + |y|^3)$. (*В. Сендеров*)

Первый тур

32. Члены жюри предложили для олимпиады по одинаковому числу задач. После этого каждый из них вычеркнул из получившегося списка по четыре задачи (никакую задачу не вычеркнули дважды). В результате в списке осталось пять задач. Сколько всего могло быть членов жюри? (*Д. Калинин*)

33. Найдите углы треугольника, если одна из его вершин является центром окружности, содержащей середины сторон этого треугольника. (*А. Блинков*)

34. Найдите все числа, представимые в виде суммы трёх натуральных чисел, все цифры которых нечётны. (*А. Спивак*)

35. На столе в ряд лежат шесть монет. Среди первых четырёх есть ровно одна фальшивая монета, среди последних двух – тоже одна фальшивая. Фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих, которые тоже весят одинаково.

а) Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь определить обе фальшивые монеты?

б) Импортные чашечные весы сообщают результат взвешивания на следующий день. Можно ли сегодня провести такие два взвешивания, чтобы завтра по полученным результатам наверняка определить обе фальшивые монеты?

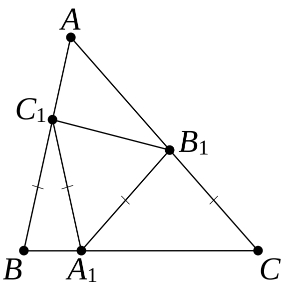
36. Для четырёх чисел вычислили все их попарные произведения. Сколько различных чисел могло при этом получиться? (*Б. Френкин*)

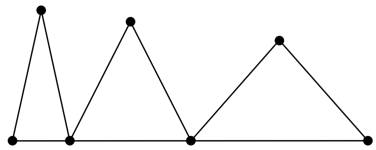
37. На окружности отмечено десять точек. Каждые две из них соединены отрезком. Сеня покрасил точки в два цвета. Какое наибольшее количество отрезков с концами в точках разного цвета могло получиться?

38. Из шахматной доски вырезали центральный квадрат 2×2. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на четырёхклеточные фигурки в виде буквы Г? Фигурки разрешается поворачивать и переворачивать. (*В. Шарич*)

39. Есть три кучки из 2005, 2006 и 2007 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять два камня, по одному из каких-нибудь двух кучек. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Д. Калинин*)

40. На сторонах AB, BC, CA остроугольного треугольника ABC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что $BC_1 = C_1A_1 = A_1B_1 = B_1C$. Вырежем треугольники BC_1A_1, $C_1A_1B_1$, A_1B_1C и выстроим их последовательно так, чтобы основания лежали на одной прямой, при этом второй треугольник перевернём, чтобы его вершина A_1 «смотрела» в другую сторону (см. рисунок). Докажите, что вершины этих трёх равнобедренных треугольников лежат на одной прямой. (*А. Мякишев*)





41. **а**) На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На какое наибольшее число частей отрезки могли разделить треугольник?

б) На каждой стороне треугольника отмечено 14 точек, делящих её на 15 равных отрезков. Каждая вершина треугольника соединена отрезками со всеми отмеченными точками противолежащей стороны. На сколько частей отрезки разделили треугольник? (*В. Брагин*)

42. Дано конечное дерево с неокрашенными вершинами и рёбрами. Петя и Вася играют, ходят по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Оба всегда играют наилучшим образом.

В первой игре они красили по одной неокрашенной вершине за ход, каждый в свой цвет. Первую вершину каждый выбирал произвольно, а затем выбирал вершину, связанную ребром с вершиной своего цвета. Победил Вася.

Во второй игре они красят по одному неокрашенному ребру за ход, каждый в свой цвет. Первое ребро каждый выбирает произвольно, а затем надо выбирать ребро, имеющее общий конец с окрашенным ребром своего цвета. Кто победит на этот раз? (*Б. Френкин*)

43. Найдите 100 первых цифр числа $3+\frac{4}{9}+\frac{5}{9\cdot 11}+\frac{6}{9\cdot 11\cdot 13}+\ldots+\frac{1003}{9\cdot 11\cdot 13\cdot\ldots\cdot 2007}$.

44. Выступления танцоров оценивались семью судьями. Каждый из судей выставлял оценку – целое число от 0 до 10, худшая и лучшая оценки отбрасывались, и выводилось среднее арифметическое. По окончании соревнований председатель жюри подсчитал, что если бы средняя оценка выводилась по всем семи оценкам, то все участники расположились бы в обратном порядке. Какое наибольшее количество танцоров могло участвовать в соревновании? (*А. Блинков*)

45. В одном из судиславских городских автобусов недавно была введена новая форма оплаты проезда. Пассажиры приобретают талон, имеющий форму круга, разбитого на 13 равных секторов. Одна сторона талона покрашена в синий цвет, а другая – в жёлтый. При входе в автобус пассажиры вставляют талон в электронный компостер синей стороной вверх, и компостер пробивает несколько секторов, предварительно проверяя, что эти секторы не были пробиты ранее. Какое наименьшее количество секторов должен пробивать компостер, чтобы один и тот же талон нельзя было использовать дважды? (*А. Акопян*)

46. На сторонах AB и CB прямоугольника $ABCD$ во внешнюю сторону построили подобные прямоугольные треугольники EAB и FCB ($\angle EAB = \angle FCB = 90°$, $\angle ABE = \angle CBF$). Отразив точку B симметрично относительно середины отрезка EF, получили точку G. Докажите, что углы BDC и ADG равны. (*А. Акопян*)

47. Клетки доски $m \times n$ раскрашены в шахматном порядке в белый и чёрный цвета. Разрешается выбрать любые две соседние по стороне клетки и перекрасить их: белые клетки – в чёрный цвет, чёрные – в красный, а красные – в белый. При каких m и n можно добиться того, чтобы все белые клетки доски стали покрашенными в чёрный цвет, а чёрные – в белый? (*М. Ахмеджанова, К. Кохась*)

48. Каких натуральных чисел от 1 до 1000 больше: представимых или не представимых в виде $x^3 - y!$, где x и y – натуральные числа? (*В. Сендеров, Н. Агаханов*)

49. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Окружность, проходящая через точку A и касающаяся биссектрисы в точке D, повторно пересекает прямую AC в точке A_1. Окружность, проходящая через точку B и касающаяся биссектрисы в точке D, повторно пересекает прямую BC в точке B_1. Докажите, что окружность, симметричная описанной окружности треугольника A_1B_1C относительно CD, касается стороны AB. (*Д. Калинин*)

Второй тур

50. В группе детского сада мальчиков на три больше, чем девочек. На прогулке дети стали прыгать через лужу. Когда воспитательница это обнаружила, успешно прыгнувших детей оказалось на восемь больше, чем промочивших ноги. Все ли дети успели прыгнуть? (*И. Раскина*)

51. На ужин в столовой давали шоколадки с разным содержанием фундука, изюма и цукатов. Даня выбрал себе одну. Он согласен поменяться шоколадкой с любым своим одноклассником при условии, что содержание хотя бы двух видов начинки в полученной шоколадке будет больше, чем в отданной. Может ли после нескольких обменов у него оказаться шоколадка с меньшим содержанием каждого вида начинки, чем в первоначальной?

52. В однокруговом турнире матбоёв за победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира оказалось, что наибольшее количество очков набрала команда, которая одержала меньше побед, чем каждая из остальных. При каком наименьшем числе команд такое возможно?

53. Галя вышивает крестиком узор на квадрате 10×10 (каждый крестик занимает ровно одну клетку). Она считает узор красивым, если он центрально-симметричен и при этом каждые два крестика одного цвета соединены цепочкой крестиков того же цвета, расположенных в клетках с общими сторонами. Какое наибольшее число цветов сможет использовать Галя? (*А. Артемьев, И. Раскина*)

54. Даны две окружности с радиусами 6 см и 8 см. Расстояние между их центрами O_1 и O_2 равно 11 см. Через середину отрезка O_1O_2 проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке A, а другую – в точке B. Какую наибольшую длину может иметь отрезок AB? (*В. Сендеров*)

55. **а**) Можно ли в клетках таблицы 12×12 расставить натуральные числа от 1 до 144 так, чтобы суммы чисел во всех строках, столбцах и обеих главных диагоналях были нечётными?

б) Та же задача для таблицы 100×100 и чисел от 1 до 10000. (*В. Берник, И. Акулич*)

56. Дан треугольник ABC. На продолжении стороны AB за точку A отмечена точка A_1, а за точку B – точка B_2. На продолжении стороны BC за точку B отмечена точка B_1, а за точку C – точка C_2. На продолжении стороны CA за точку C отмечена точка C_1, а за точку A – точка A_2. При этом $AA_1 = AA_2 = BC$, $BB_1 = BB_2 = CA$, $CC_1 = CC_2 = AB$. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности. (*Дж. Конвей*)

57. Папа с сыном пошли в тир. За один подход каждый делал по пять выстрелов, при этом папа всегда попадал в цель четыре раза, а сын – вдвое меньше. Всего у них получилось в 2 раза больше попаданий, чем промахов. Кто сделал больше выстрелов и во сколько раз? (*И. Раскина*)

58. После окончания чемпионата мира по футболу для каждой команды вычислили отношение числа голов, забитых ею с пенальти, к числу пробивавшихся ею пенальти и отношение числа голов, пропущенных с пенальти, к числу пенальти, пробитых в её ворота. Может ли у всех команд первый показатель быть меньше второго? (*А. Заславский*)

59. Существует ли такое натуральное n, что число n^2 представимо в виде суммы квадратов трёх попарно взаимно простых натуральных чисел? (*В. Сендеров*)

60. Дан равнобедренный треугольник ABC. На боковых сторонах AB и BC выбираются точки K и L соответственно так, что $AK + CL = \frac{1}{2}AB$. Найдите геометрическое место середин отрезков KL. (*Д. Калинин*)

61. В однокруговом футбольном турнире участвовали 20 команд. Оказалось, что если какие-то две команды сыграли друг с другом вничью, то хотя бы одна из них завершила вничью не больше трёх матчей. Какое наибольшее число ничьих могло быть в таком турнире? (*И. Акулич*)

62. Существуют ли различные натуральные числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению $x^3 + y^3 = z^{2006}$? (*В. Сендеров*)

63. **а**) Какое наибольшее число сторон может быть у многоугольника, полученного в пересечении четырёхугольника и пятиугольника?

б) Докажите, что в пересечении m-угольника и n-угольника не может получиться многоугольник более чем с $2m + 2n - 6$ сторонами. (*А. Шаповалов*)

64. Существуют ли положительные числа x, y, z, t, удовлетворяющие равенствам

а) $x^3 + y^3 + z^3 = t^3$ и $\frac{1}{x^5} + \frac{1}{y^5} + \frac{1}{z^5} = \frac{1}{t^5}$; **б**) $x^5 + y^5 + z^5 = t^5$ и $\frac{1}{x^7} + \frac{1}{y^7} + \frac{1}{z^7} = \frac{1}{t^7}$;

в) $x^{2005} + y^{2005} + z^{2005} = t^{2005}$ и $\frac{1}{x^{2007}} + \frac{1}{y^{2007}} + \frac{1}{z^{2007}} = \frac{1}{t^{2007}}$. (*В. Сендеров*)

65. Пусть a, b, c, x, y, z – такие целые числа, что $a + b + c = x + y + z = 0$. Докажите, что произведение $(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2})(-\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2}) \times$ $\times(\sqrt{a^2+x^2} - \sqrt{b^2+y^2} + \sqrt{c^2+z^2})(\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2} - \sqrt{c^2+z^2})$ является точным квадратом. (*С. Токарев*)

66. Выпуклый четырёхугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Докажите, что у четырёхугольника с вершинами в центрах этих окружностей суммы квадратов противоположных сторон равны. (*А. Акопян*)

67. На стороне AB квадрата $ABCD$ выбрана точка P, на стороне BC – точки Q и R, а на стороне DA – точка S так, что $BP = BQ = CR = DS = \frac{1}{3}AB$. Вычислите $\angle BRP + \angle BSQ + \angle DPS - \angle CPR$. (*О. Крижановский*)

68. Пусть P – произведение некоторых восьми последовательных натуральных чисел, а Q – наименьший точный квадрат, больший P. Докажите, что разность $Q-P$ является точным квадратом. (*С. Токарев*)

69. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Прямая, проходящая через точку O и середину стороны BC, пересекает сторону AD в точке E. Докажите, что отношение площадей треугольников ABO и DCO равно отношению длин отрезков AE и DE. (*М. Волчкевич*)

70. Решите в натуральных числах уравнение $x^6 + 3^y = z^2$. (*В. Сендеров*)

71. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием AC описана окружность. Пусть BD – диаметр этой окружности, K – произвольная точка меньшей дуги BC, а K_1 и K_2 – точки, симметричные K относительно прямых AC и BC соответственно. Докажите, что прямые AC, DK и K_1K_2 пересекаются в одной точке. (*А. Акопян*)

Третий тур

72. В однокруговом шахматном турнире Солнечного города принимали участие 100 коротышек. После турнира Незнайка неожиданно узнал, что за ничью начислялось не полочка, как он думал, а 0 очков, а за поражение – не 0 очков, а −1. А вот за победу, как он и считал, действительно давали 1 очко. Сколько очков в итоге набрал Незнайка, если их оказалось в 2 раза меньше, чем ему казалось? (*Д. Калинин, С. Токарев*)

73. Решите ребус РОТОР : СОКОЛ = 3 : 1. (*А. Хачатурян*)

74. Можно ли в клетках таблицы 3×3 расставить натуральные числа от 1 до 9 так, чтобы сумма чисел в каждых трёх клетках, никакие две из которых не находятся в одной строке или в одном столбце, равнялась 15? (*Д. Калинин*)

75. Пусть M – середина стороны AD прямоугольника $ABCD$. Известно, что отрезки BD и CM перпендикулярны и пересекаются в точке N. Докажите, что треугольник ABN равнобедренный. (*Д. Калинин*)

76. **а**) Художник-абстракционист хочет раскрасить клетки шахматной доски в три цвета так, чтобы выполнялось условие: если одинаково окрашенные клетки A и B граничат по стороне с клеткой C, то с C граничат ещё две клетки, окрашенные одинаково, но не в такой цвет, как у A и B. Сможет ли он это сделать?

б) В условиях пункта а) при каких n художник сможет так раскрасить доску в n цветов? (*Е. Барабанов, И. Акулич*)

77. Из клетчатой бумаги по линиям сетки вырезали многоугольник. Всегда ли можно вырезать (тоже по линиям сетки) содержащий его прямоугольник того же периметра? (*В. Сендеров*)

78. На доске написали квадрат, куб, четвёртую и пятую степени каких-то натуральных чисел. Одно из этих чисел разделили на 2, другое – на 3, третье – на 4, четвёртое – на 5. Могли ли снова получиться квадрат, куб, четвёртая и пятая степени каких-нибудь натуральных чисел? (*Д. Калинин*)

79. Из пяти монет три настоящие, весящие одинаково, и две фальшивые, одна из которых на 1 г легче настоящих, а вторая – на 1 г тяжелее. Можно ли за три взвешивания на чашечных весах без гирь гарантированно определить фальшивые монеты и узнать, какая из них легче?

80. В некоторой компании у каждого человека есть хотя бы один знакомый, а каждые два человека с общим знакомым имеют разное число знакомых. Докажите, что в этой компании есть человек, у которого только один знакомый. (*С. Конягин*)

81. В ряд записано несколько различных натуральных чисел. Назовём пару рядом стоящих чисел плохой, если они одной чётности и левое больше правого, либо они разной чётности и левое меньше правого. Каждую минуту числа какой-нибудь из плохих пар меняются местами. Докажите, что рано или поздно такие перестановки прекратятся.

(*А. Шаповалов*)

82. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r), удовлетворяющие равенству $p^3 + q^3 = 2r^3$.

(*В. Сендеров*)

83. Пусть d – наибольшее из положительных чисел a, b, c, d. Докажите неравенство $a(d-b)+b(d-c)+c(d-a)\le d^2$.

84. Окружность, проходящая через точки A и C, повторно пересекает гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC в точке D. Окружность, проходящая через точки B и C, повторно пересекает AB в точке E. Сами окружности повторно пересекаются в точке F. Найдите угол DFE. (*Д. Калинин*)

85. Многочлены с целыми коэффициентами $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ таковы, что $P(x) = Q(x)R(x)$. Про $P(x)$ известно, что он имеет степень 4 и все его коэффициенты по модулю не превосходят единицы. Найдите наибольшее возможное значение среди коэффициентов многочленов $Q(x)$ и $R(x)$. (*В. Сендеров*)

86. Дан выпуклый многоугольник $A_1A_2\ldots A_n$. Обозначим через a_k длину стороны $A_{k-1}A_k$ (считаем, что $A_0 = A_n$), а через d_k – длину проекции многоугольника на прямую, содержащую сторону $A_{k-1}A_k$. Докажите неравенство $\frac{a_1}{d_1}+\frac{a_2}{d_2}+\ldots+\frac{a_n}{d_n}>2$. (*Д. Фомин*)

87. Точка K принадлежит меньшей дуге BC описанной окружности равнобедренного треугольника ABC. Точки P и Q симметричны K относительно боковых сторон AB и AC. Прямая l симметрична AK относительно биссектрисы угла A. Докажите, что прямые l и PQ перпендикулярны. (*Д. Калинин*)

88. У натурального числа есть десять различных простых делителей. Докажите, что найдётся несколько делителей этого числа, сумма которых делится на 1024. (*Д. Калинин*)

89. Найдите все натуральные n, при которых число $1+2^n$ простое и делит 3^n+4^n.

(*В. Шарич*)

91. Сумма неотрицательных чисел x, y, z равна 1. Докажите неравенство
$\frac{1}{1+4x^2}+\frac{1}{1+4y^2}+\frac{1}{1+4z^2}\ge 2.$ (*В. Сендеров, В. Шарич*)

92. Углы B и C треугольника ABC равны 50° и 30° соответственно. Внутри треугольника выбрана точка M так, что $\angle MBC = 20°$ и $\angle MCB = 10°$. Докажите, что прямые AM и BC перпендикулярны.

Финал

93. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до n. Сеня подсчитал, сколько всего цифр выписано. Оказалось, что это число записывается теми же цифрами, что и n, но в обратном порядке. Найдите n, если известно, что оно **а**) двузначно; **б**) трёхзначно.

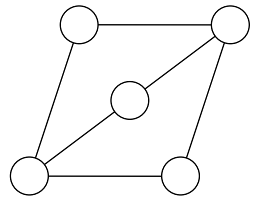
(*А. Шаповалов*)

94. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Докажите, что если M – середина диагонали AC, а N – середина стороны DE, то треугольник FMN равносторонний.

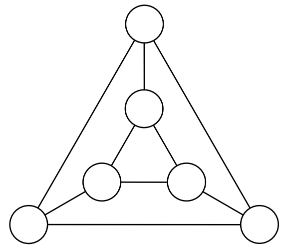
95. Нарисуйте фигуру, которую можно разрезать как на три равных треугольника, так и на четыре равных четырёхугольника. (*А. Шаповалов*)

96. Назовём треугольник почти прямоугольным, если в нём есть угол, отличающийся от прямого не более чем на 15°. Назовём треугольник почти равнобедренным, если в нём есть два угла, отличающиеся не более чем на 15°. Докажите, что любой остроугольный треугольник является почти прямоугольным или почти равнобедренным. (*В. Гуровиц*)

97. У Сени есть пять альбомов с фотографиями. Как-то, рассматривая их, он заметил, что суммарное число фотографий в каждых двух альбомах принимает только три значения: 75, 88 и 101. Сколько фотографий в каждом альбоме? (*Е. Барабанов*)



98. **а**) Можно ли расставить в пяти кругах на рисунке натуральные числа так, чтобы для каждых двух кругов, соединённых отрезком, одно из чисел, стоящих в них, делилось на другое, а для каждых двух кругов, не соединённых отрезком, стоящие в них числа друг на друга не делились?



б) Та же задача для шести кругов на следующем рисунке. (*А. Шаповалов*)

99. **а**) Квадратная клетчатая таблица 4×4 заполнена числами так, что в каждом квадрате 2×2 и в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна нулю. Докажите, что суммы чисел в противоположных угловых клетках квадрата равны нулю.

б) Квадратная клетчатая таблица 7×7 заполнена числами так, что в каждом квадрате 2×2 и в каждом квадрате 3×3 сумма чисел равна нулю. Докажите, что числа в угловых клетках квадрата равны. (*А. Шаповалов*)

100. **а**) Фома и Ерёма делят три куска сыра. Сначала Фома, если хочет, выбирает один кусок и режет его на два. Затем он раскладывает все имеющиеся куски на две тарелки. После этого Ерёма выбирает одну тарелку, и они делят сыр на ней, беря себе по очереди по куску, первым берёт Ерёма. Точно так же они делят сыр со второй тарелки, только первым берёт Фома. Докажите, что Фома всегда может действовать так, чтобы получить не менее половины сыра (по весу).

б) Докажите то же утверждение для любого начального числа кусков. (*А. Шаповалов*)

101. Есть обычный комплект домино. Каждая доминошка в точности накрывает две клетки шахматной доски. Можно ли уложить на доске весь комплект так, чтобы в каждой паре клеток с общей стороной, накрытых разными доминошками, были половинки с одинаковым числом очков? (*А. Шаповалов*)

102. За одну операцию разрешается изменить в треугольнике длину одной из сторон (но так, чтобы он остался треугольником).

а) Докажите, что за три операции треугольник можно превратить в любой другой треугольник того же периметра.

б) Докажите, что за 12 операций из равностороннего треугольника со стороной 1 можно сделать равносторонний треугольник со стороной 40.

в) За какое наименьшее число операций из равностороннего треугольника со стороной 100 можно сделать равносторонний треугольник со стороной 1? (*А. Шаповалов*)

103. Два велосипедиста ездили с постоянными скоростями по круговому треку. Они стартовали с одной линии, но в разные стороны.

а) Их третья встреча произошла на линии старта. Известно, что первый тратил на один круг на 45 секунд меньше второго. Через какое время после старта произошла первая встреча?

б) Их седьмая встреча произошла на линии старта. За сколько секунд каждый из них проезжал круг, если известно, что первый тратил на него на 12 секунд меньше второго и при этом проезжал круг не быстрее чем за 30 секунд?

в) Их восьмая встреча произошла на линии старта. За сколько секунд каждый из них проезжал круг, если известно, что первый тратил на него на 14 секунд больше второго и при этом проезжал круг не быстрее чем за 30 секунд?

104. Гирьки массой **а**) 1 г, 2 г, …, 40 г; **б**) 1 г, 2 г, …, n г, где $n > 4$, разложили на две чаши весов так, что весы оказались в равновесии. Докажите, что можно убрать с чаш три гирьки так, чтобы равновесие не нарушилось. (*А. Шаповалов*)

105. **а**) Найдите наибольшее натуральное n, для которого число $10n$ делится на все натуральные числа, меньшие n.

б) Найдите наибольшее натуральное n, которое делится на все натуральные числа, не превосходящие $\frac{n}{10}$. (*И. Акулич*)

106. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты точки P, M, N, Q соответственно так, что $\angle MAN = 45°$, отрезок PM параллелен AN, а отрезок QN параллелен AM.

а) Докажите, что точки A, P, M, N, Q лежат на одной окружности.

б) Отрезок PQ пересекает отрезки AM и AN в точках E и F соответственно. Докажите, что площадь треугольника EAF равна сумме площадей треугольников PME и QNF. (*В. Произволов*)

107. Решите уравнение $x^2 = 3p^n + 1$, где x и n натуральные, а p простое. (*В. Сендеров*)

108. В треугольнике h_1, h_2, h_3 – длины высот, d_1, d_2, d_3 – расстояния от некоторой внутренней точки до сторон треугольника. Докажите неравенство $(h_1^4 + h_2^4 + h_3^4)^3 \geq 3^{15}(d_1d_2d_3)^4$. (*В. Сендеров*)

109. Назовём треугольники сходными, если у них равны как минимум две из трёх сторон. Докажите, что найдётся квадрат, который можно разбить на треугольники, сходные данному остроугольному треугольнику. (*А. Шаповалов*)

Источник: http://tursavin.ru