XVII турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2011 года

Личная олимпиада

1. В некотором году было больше вторников, чем понедельников, и больше сред, чем четвергов. Каким днём недели был последний день февраля? (*Б. Френкин*)

2. На треугольной сетке нарисован правильный шестиугольник со стороной 3. Разрежьте его по линиям сетки на девять попарно различных фигур одинаковой площади. (*И. Раскина*)

3. Девять голодных пионерок за час набирают корзину клубники и наедаются досыта. Сытые пионерки клубнику не едят, поэтому набирают корзину за час вшестером. Сколько голодных пионерок можно накормить досыта корзиной клубники? (*И. Раскина*)

4. По кругу стоят 2011 аборигенов. Некоторые из них – рыцари, которые всегда говорят правду, остальные – лжецы, которые всегда врут, причём есть хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Каждого из них спросили: «Верно ли, что среди двух твоих соседей чётное количество лжецов?» Может ли так случиться, что каждый из них ответит «Да»?

5. Вася утверждает, что может нарисовать шестиугольник и, проведя прямую через две его вершины, отрезать от него семиугольник. Может ли Вася быть прав? (*В. Гуровиц*)

6. На доске написаны дроби $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{2011}$. Можно ли выбрать из них семь дробей так, чтобы сумма каких-то трёх из них равнялась сумме оставшихся четырёх? (*А. Шаповалов*)

7. Коля отметил на числовой прямой несколько точек красным цветом. Сумма координат всех красных точек равна 2111, причём у двух крайних сумма равна 200. Затем Саша отметил синим цветом середину каждого отрезка, соединяющего две соседние красные точки. Найдите сумму координат синих точек. (*А. Шаповалов*)

8. Петя составил расписание однокругового шахматного турнира для восьми человек так, чтобы в каждом туре одновременно игрались четыре партии. У какого наибольшего количества игроков цвета фигур от тура к туру могут чередоваться? (*А. Шаповалов*)

9. Было восемь гирек, массы которых равны 1 г, 2 г, …, 8 г. Одна из них потерялась, а остальные выложили в ряд по возрастанию массы. Есть электронные весы с лампочкой, которые проверяют только, есть равновесие на двух чашах или нет. Как за три взвешивания определить, какая именно гирька потерялась? (*А. Шаповалов*)

10. По кругу написано $n > 2$ попарно различных чисел, причём каждое равно произведению двух соседних с ним. Найдите все возможные значения n. (*Б. Френкин*)

11. Вася вырезал из бумаги многоугольник, а Петя разрезал его на треугольник и четырёхугольник. Сколько сторон могло быть в Васином многоугольнике? (*И. Раскина*)

12. Сумма трёх попарно различных положительных нечётных чисел равна 89. Известно, что для каждых двух из этих чисел одно делится на другое. Найдите эти числа. (*А. Шаповалов*)

13. На координатной плоскости нарисованы 100 графиков функций вида $y = ax + b$. Известно, что среди коэффициентов a и b каждое натуральное число от 1 до 200 встречается ровно один раз. На какое наименьшее количество частей эти графики могут разбивать плоскость? (*А. Шаповалов*)

14. В треугольнике ABC угол C равен 60°. На продолжении стороны BC за точку C выбрана точка D так, что $AC + CD = BC$. Докажите, что треугольник ABD равнобедренный.

15. Дан клетчатый квадрат 8×8. Петя и Вася ходят по очереди. Сначала Петя делит квадрат по линии сетки одним прямолинейным разрезом на две части. Каждый последующий ход делается аналогично: выбирается один из уже имеющихся прямоугольников и делится по линии сетки прямолинейным разрезом на две части. Выигрывает тот, кто после своего хода сможет сложить из всех частей прямоугольник 2×32. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

16. В однокруговом футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира оказалось, что у единоличного победителя побед меньше, чем поражений. Какое наименьшее количество команд могло участвовать в турнире? (*А. Блинков, А. Заславский*)

17. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30°. Вписанная окружность треугольника с центром I касается катета AC в точке K и пересекает отрезок BI в точке N. Точка M – середина отрезка AI. Докажите, что $KM = CN$. (*Д. Швецов*)

18. Трём математикам нарисовали на лбу по прямоугольнику (с указанием размеров) и сообщили, что из этих трёх прямоугольников можно сложить квадрат. Каждый математик не видит, что нарисовано у него на лбу, но видит лбы двух других. Первый сказал, что не может определить размеры прямоугольника у себя на лбу. Затем то же самое сказал второй математик. Найдите отношение сторон прямоугольника на лбу третьего математика. (*А. Шаповалов*)

19. В трапеции $ABCD$ основание BC вдвое меньше основания AD. На боковую сторону AB из вершины D опущен перпендикуляр DE. Докажите, что $CE = CD$. (*Н. Москвитин*)

20. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 2011. Два игрока по очереди стирают по одному числу, пока не останется два числа. Если их можно подставить вместо p и q в уравнение $x^2 + px + q = 0$ так, чтобы у этого уравнения был целый корень, то выигрывает первый игрок. Сможет ли второй игрок ему помешать? (*Е. Куликов*)

21. В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Точка M – середина стороны AB. Описанная окружность треугольника AMA_1 повторно пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Докажите, что AK – касательная к описанной окружности треугольника ABC.
(*Ю. Блинков*)

22. На плоскости отметили семь точек и провели всевозможные отрезки с концами в этих точках. Оказалось, что для каждого отрезка есть ему параллельный. Обязательно ли среди отмеченных точек найдутся три, лежащие на одной прямой? (*А. Шаповалов*)

Командная олимпиада

23. В ряд стоят 33 гири в порядке возрастания масс. Известно, что каждые четыре подряд стоящие гири можно разложить по две на чаши весов так, чтобы было равновесие.

а) Третья гиря весит 9 г, девятая – 33 г. Сколько весит 33-я гиря?

б) Первая гиря весит 4 г, четвёртая – 11 г, одиннадцатая – 24 г. Сколько весит 24-я гиря? (*А. Шаповалов*)

24. **а**) Докажите, что квадрат можно разрезать на семиугольник и восьмиугольник так, чтобы для каждой стороны восьмиугольника нашлась равная ей сторона семиугольника.

б) Докажите, что неравнобедренный треугольник можно разрезать на четырёхугольник и пятиугольник так, чтобы для каждой стороны пятиугольника нашлась равная ей сторона четырёхугольника.

в) Докажите то же утверждение для любого треугольника. (*А. Шаповалов*)

25. Двое играют на клетчатой доске 9×9. Первый своим ходом ставит фишку на любую клетку, а потом передвигает её в одну из соседних по стороне клеток. Далее они по очереди передвигают фишку на одну из соседних клеток, при этом нельзя ставить фишку туда, где она уже была. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Д. Калинин*)

26. В классе учатся рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего 25 учеников. Первый сказал: «Среди моих друзей-одноклассников рыцарей на одного больше, чем лжецов». Второй сказал: «Среди моих друзей-одноклассников рыцарей на два больше, чем лжецов» и так далее до 25-го ученика, который сказал, что среди его друзей-одноклассников рыцарей на 25 больше, чем лжецов. Сколько лжецов учится в этом классе? (*А. Шаповалов*)

27. Артём, в силу природной лени, обычно делает работу за 6 часов. Но если он выпьет квасу, то выполняет работу за 3 часа. Артём начал выполнять работу в полдень, но в какой-то момент ему принесли квас, поэтому он закончил работу за 4 часа. Во сколько Артёму принесли квас? (*В. Трушков, И. Руденко*)

28. Решите ребус КВАНТ + КВАНТ = ТУРНИР. (*Э. Акопян*)

29. Даны две обыкновенные несократимые дроби. У первой сумма числителя и знаменателя равна 125, у второй такая сумма равна 200. Может ли сумма этих двух дробей быть равна $\frac{17}{20}$? (*А. Шаповалов*)

30. Клетчатую рамку 17×17 толщиной в одну клетку разрезали по границам клеток на несколько частей и сложили из них квадрат 8×8. Каково наименьшее возможное количество частей? (*А. Шаповалов*)

31. Для неотрицательных чисел a, b, c, d выполняются равенства $a^2 + b = b^2 + c = c^2 + d = d^2 + a$. Верно ли, что $a = c$? (*Б. Френкин*)

32. На шахматную доску, первоначально пустую, по одному выставляются слоны. Первого можно выставить произвольно, а каждый следующий должен в момент выставления побить нечётное число слонов. Какое наибольшее количество слонов может быть выставлено? (*А. Шаповалов*)

33. Найдите все пары натуральных чисел, произведение которых на 250 больше их полусуммы. (*А. Шаповалов*)

34. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Серединный перпендикуляр к отрезку AI пересекает сторону AC в точке A_1, а серединный перпендикуляр к отрезку BI пересекает сторону BC в точке B_1. Докажите, что точки A_1, I, B_1 лежат на одной прямой. (*Д. Швецов*)

35. В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведены медиана CM и высота CH. Вписанная окружность треугольника CMH касается сторон CM и CH в точках E и F. Прямая EF пересекает катеты треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что треугольник PQC равнобедренный. (*Д. Швецов*)

36. Найдите все такие натуральные числа a, b, c, что $a < b$, $a + b = c$ и $a^3 + b^3 = c^2$. (*Б. Френкин*)

37. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего 100 человек. Каждому из них задали вопрос: «Сколько рыцарей среди твоих друзей на острове?», и в качестве ответов были получены все целые числа от 0 до 99. Сколько рыцарей живёт на острове? (*А. Шаповалов*)

38. Дан равнобедренный остроугольный треугольник ABC с основанием AC. Высоты AD и CE пересекаются в точке H. Прямая CE повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке F. Докажите, что AD является касательной к описанной окружности треугольника FBH. (*Н. Москвитин*)

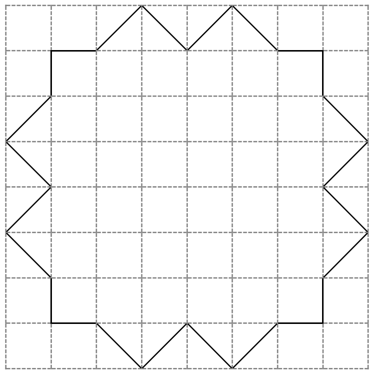
39. В четырёхугольнике $ABCD$ угол B тупой, точка M – середина стороны CD. Докажите, что $AM + BM < AC + AD$. (*Ю. Блинков*)

Первый тур

40. На каждой из 24 клеток поверхности куба $2 \times 2 \times 2$ сидит по одному пауку, каждый из которых либо всегда говорит правду, либо всегда врёт. Каждый паук заявил, что среди его соседей есть лжец (соседями считаются пауки, сидящие на клетках с общей стороной). Какое наибольшее число пауков-лжецов может сидеть на кубе? (*Д. Калинин*)

41. Положительное число округлили до ближайшего целого и получили число, которое больше исходного на 28%. Чему могло быть равно исходное число? (*А. Шаповалов*)

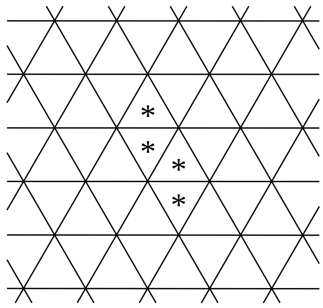
42. Раньше у школы проходили два автобусных маршрута. Автобусы маршрута № 1 ходили каждые 10 минут, а маршрута № 2 – каждые 15 минут. Теперь здесь проходит только маршрут № 3, но общее количество автобусов за день такое же, как и раньше. Интервалы между рейсами весь день одинаковые. Чему они равны? (*Б. Френкин*)



43. Вася разрезал фигуру, изображённую на рисунке, на четыре равных многоугольника, вершины которых лежат в узлах сетки. Может ли в каждом полученном многоугольнике быть больше **а**) 17 углов; **б**) 23 углов? (*И. Николаева*)

44. На классной доске написали два числа: с левой стороны – 2011, а с правой – 1000. За один ход можно прибавить к числу, написанному с левой стороны, некоторое натуральное число, а число, написанное с правой стороны, умножить на то же самое число. Можно ли уравнять числа на разных сторонах доски, сделав не более 1000 ходов? (*А. Штерн*)

45. На бесконечной доске, разбитой на треугольные клетки, двое играют в крестики-нолики. Выигрывает тот, кто поставит четыре своих знака в ряд (см. рисунок). Если игра не заканчивается в течение 2011 ходов, объявляется ничья.



а) Может ли первый игрок выиграть, как бы ни играл соперник?

б) Каков результат при наилучшей игре сторон? (*А. Банникова, Е. Пономарёва*)

46. На доске в строку написаны десять натуральных чисел. За одну операцию разрешается увеличить на 1 любые три рядом стоящих числа. Всегда ли за несколько операций можно добиться, чтобы все числа делились на 4?

47. В однокруговом хоккейном турнире участвовало **а**) десять команд; **б**) n команд. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. По итогам турнира оказалось, что все команды набрали разное число очков. Какой наименьший разрыв мог получиться между первой и последней командами? (*А. Блинков*)

48. 17 школьников сдавали тест. Каждый из них набрал целое число баллов, при этом у всех оказалось разное число баллов. Каждый школьник набрал меньше, чем любые два в сумме. Могло ли случиться так, что Петя набрал 15 баллов? (*Б. Френкин*)

49. Для каждого натурального числа, начиная с 1, подсчитали количество жителей Судиславля, возраст которых не меньше этого числа. Полученные результаты сложили. Докажите, что результат равен сумме возрастов жителей Судиславля.

50. В Бесповоротном королевстве каждые два города соединены прямой дорогой (возможно, проходящей через промежуточные города). Дороги пересекаются только в городах. Дорога считается главной, если на ней находятся все города, за исключением, быть может, одного или двух. Обязательно ли в этом королевстве есть хотя бы одна главная дорога? (*А. Шаповалов*)

51. На шахматную доску, первоначально пустую, по одной выставляются ладьи. В момент выставления ладья должна побить чётное число свободных клеток (возможно, ни одной). Какое наибольшее количество ладей может быть выставлено? (*А. Шаповалов*)

52. На координатной плоскости выбраны точки $A(-1, 2)$ и $B(3, -1)$. Найдите угол AOB, где O – начало координат.

53. Буратино взялся вскопать поле чудес. Лиса Алиса обещала каждый день выдавать ему простое число золотых монет. В первые два дня он может сам выбрать эти простые числа, а с третьего дня его заработок должен быть равен сумме позавчерашнего и удвоенного вчерашнего. Какое наибольшее количество дней Буратино может рассчитывать на зарплату? (*А. Грибалко*)

54. В стране шесть городов. Каждые два города соединены авиалинией одной из двух авиакомпаний. Обязательно ли существует замкнутый маршрут из четырёх авиалиний одной авиакомпании? (*В. Трушков*)

55. Точка E – середина стороны BC квадрата $ABCD$, F – такая точка на стороне CD, что $CF : DF = 3 : 1$, M – середина отрезка AE. Найдите угол BMF. (*Д. Швецов*)

56. Числа x и y положительные, не целые и различные. Среди четырёх чисел $x+y$, $x-y$, xy, $\frac{x}{y}$ ровно три целых. Сколько среди этих трёх чисел чётных? (*Б. Френкин*)

57. В равнобедренном треугольнике угол между одной из биссектрис и одной из высот равен 75°. Чему могут быть равны углы треугольника? (*А. Блинков*)

58. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Вписанная в него окружность с центром I касается стороны BC в точке D. Биссектриса угла A повторно пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке E. Докажите, что $ID = ED$. (*Н. Москвитин*)

59. Петя задумал приведённое квадратное уравнение с целыми корнями и сообщил об этом Васе. Вася задал Пете один вопрос и получил на него ответ. Этого Васе хватило, чтобы однозначно восстановить уравнение. Известно, что Вася задал один из вопросов: «Чему равен коэффициент при x?» или «Чему равен свободный член?» Какое уравнение задумал Петя? (*Б. Френкин*)

60. Дан отрезок AB. На этом отрезке взята произвольная точка C, на полученных отрезках AC и BC как на сторонах в одной и той же полуплоскости относительно AB построены квадраты. С помощью одной линейки без делений постройте квадрат, диагональю которого является отрезок AB. (*Н. Москвитин*)

Второй тур

61. Какое наибольшее количество натуральных чисел от 1 до 100 можно взять, чтобы произведение каждых 11 из них было кратно 6? (*Д. Калинин*)

62. Куб $10 \times 10 \times 10$ составлен из чёрных единичных кубиков. Серёжа красит всю поверхность куба в красный цвет, после чего Ваня забирает себе сколько хочет кубиков, у каждого из которых ровно три грани оказались красными. Затем Серёжа снова красит всю поверхность в красный цвет, а Ваня забирает кубики по тому же правилу и так далее. Может ли Ваня в итоге забрать себе все кубики? (*Д. Калинин, Э. Акопян*)

63. **а**) Есть 11 запечатанных коробок, в которых 10, 11, …, 20 карандашей (на каждой коробке написано, сколько в ней карандашей). Два игрока по очереди берут себе по карандашу, пока не разберут все. Каждый из них имеет право распечатать коробку, если в открытых коробках карандашей больше нет. За вскрытие коробки игрок платит рубль сопернику. Кто и сколько рублей выиграет при наилучшей игре сторон?

б) Та же задача, но игроки могут распечатывать коробки в любой момент.
(*А. Шаповалов*)

64. Клетчатый квадрат 8×8 разрезали по границам клеток на три многоугольника одинакового периметра. Найдите наибольшее возможное значение этого периметра. (*А. Шаповалов*)

65. У Пети есть двое электронных часов, идущих неправильно. Каждые показывают время четырьмя цифрами: часы (от 00 до 23) и минуты (от 00 до 59). В некоторый момент Петя обнаружил, что на часах горят восемь различных цифр. Чему равна наибольшая возможная сумма этих восьми цифр? (*В. Гуровиц*)

66. В однокруговом футбольном турнире участвовало несколько команд. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за проигрыш – 0. После окончания турнира одну из команд дисквалифицировали, а все очки, набранные в матчах с ней, аннулировали. Могла ли команда, сначала занимавшая чистое первое место, стать абсолютно последней? (*А. Заславский*)

67. Три яблока вместе весят 300 г. Массы каждых двух яблок отличаются не более чем вдвое. Докажите, что найдутся два яблока, суммарная масса которых лежит между 180 г и 225 г. (*А. Шаповалов*)

68. В клетках таблицы 11×11 написаны все натуральные числа от 1 до 121, причём число 1 стоит в левом нижнем углу, а число 121 – в правом верхнем. Оказалось, что каждые два числа, отличающиеся на 1, стоят в соседних по стороне клетках. Какова наибольшая возможная разность между числами в соседних клетках? (*Б. Френкин*)

69. Верно ли, что любой прямоугольник можно разрезать на два многоугольника так, чтобы площадь первого была хотя бы вдвое больше площади второго, а периметр первого был хотя бы вдвое меньше периметра второго? (*А. Шаповалов*)

70. Десять гномов вместе выпивают ведро молока за минуту. Каждый гном пьёт молоко с некоторой постоянной скоростью, но скорости у разных гномов могут быть различными. Докажите, что если разлить молоко поровну в десять бутылок, то гномы тоже смогут управиться с ним за минуту. Из каждой бутылки в каждый момент может пить только один гном, но разрешается любое число раз обмениваться бутылками (обмен происходит мгновенно). (*И. Рубанов*)

71. По кругу расположены 30 монет, чередуясь: три подряд орлом вверх, три подряд – решкой, три – орлом, три – решкой и так далее. Если у монеты две соседних с ней лежат по-разному, её можно перевернуть. Какое наибольшее число монет можно положить орлом вверх с помощью таких операций? (*А. Шаповалов*)

72. Эники-беники ели вареники. Каждый съел меньше трети, но больше пятой части того, что съели остальные. Сколько было Эников-беников?

73. Можно ли поверхность куба оклеить в один слой 15 одинаковыми прямоугольниками?

74. «В этой фразе доля цифр X составляет …/…, доля цифр Y – …/…, а на долю остальных использованных цифр остаётся …/…». Вставьте вместо X и Y разные цифры, а вместо многоточий – числа так, чтобы утверждение было верным. (*А. Шаповалов*)

75. **а**) За одну операцию разрешается отрезать от многоугольника по прямой линии равнобедренный треугольник. Можно ли за несколько операций превратить квадрат в прямоугольник, одна из сторон которого в 7 раз больше другой?

б) Дан квадрат. Постройте какой-нибудь прямоугольник с отношением сторон 1 : 7 так, чтобы на каждой стороне квадрата лежало по вершине прямоугольника. (*А. Шаповалов*)

76. На сторонах AB и BC равностороннего треугольника ABC взяты точки D и E так, что $\angle ACD = \angle BAE = 17°$. Отрезки CD и AE пересекаются в точке O. Серединный перпендикуляр к отрезку CO пересекает прямую AE в точке K. Докажите, что прямые BK и CD параллельны.

77. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30°. На катетах AC и BC отмечены точки D и E так, что $\angle ABD = 40°$ и $\angle BAE = 20°$. Найдите углы треугольника DEC.

78. На доске в строку написаны пять положительных чисел (не обязательно различных). Все их десять попарных сумм выписаны во второй строке, а все десять попарных произведений – в третьей. Оказалось, что наборы чисел во второй и третьей строках одинаковы (каждое число встречается во второй строке столько же раз, сколько и в третьей). Какие числа могут быть написаны в первой строке? (*Б. Френкин*)

79. В строку выписаны шестизначные числа, первое из которых равно 123456, а последнее – 654321. Соседние числа отличаются на 1 или на 1000. Ни одно число не делится на 1000. Докажите, что хотя бы одно число делится на 13. (*А. Шаповалов*)

80. В ряд стоит несколько стаканов, каждый из них вниз или вверх дном. За одну операцию разрешается выбрать стакан, стоящий вверх дном, и перевернуть его соседей (двух, если стакан не крайний, или одного, если крайний). Докажите, что такими операциями можно из любого расположения стаканов получить симметричное ему (то есть такое же, но справа налево). (*А. Лебедев, А. Шаповалов*)

81. Известно, что a, b, c – простые, не обязательно различные числа. Докажите, что число $a^{b^c}+1$ либо составное, либо оканчивается на 7. (*Г. Жуков*)

82. Отрезок AB является общей хордой двух окружностей равного радиуса. Через точку K, лежащую на этом отрезке, проведён к нему перпендикуляр, который пересекает окружности в точках C и D (в одной из полуплоскостей относительно AB). Докажите, что D является точкой пересечения высот треугольника ABC. (*А. Блинков*)

83. В треугольнике ABC медиана, проведённая из вершины A, перпендикулярна биссектрисе угла B. Докажите, что угол C не больше 30°. (*А. Заславский, Б. Френкин*)

84. Уравнение $x^2 + cx + c = 0$ имеет целые корни (не обязательно различные). Найдите возможные значения c. (*Б. Френкин*)

85. Известно, что число $\overline{aa\ldots a}$ кратно $\overline{bb\ldots b}$. Обязательно ли количество цифр первого числа делится на количество цифр второго? (*Б. Френкин*)

86. На шахматной доске отметили 12 клеток. Докажите, что среди отрезков, соединяющих центры отмеченных клеток, найдутся три одинаковых. (*А. Грибалко*)

Третий тур

87. В игре «Что? Где? Когда?» участвовали 20 команд. Каждая команда письменно ответила на несколько вопросов. Ответ на каждый вопрос сдавался на отдельной карточке. Ровно десять команд сдали верные ответы не более чем на пять вопросов, при этом их карточки с верными ответами составили более 30% от всех карточек с верными ответами. Можно ли утверждать, что найдутся три команды, которые дали поровну верных ответов? (*Д. Калинин*)

88. Клетки таблицы 5×5 заполнены нулями. За одну операцию можно выбрать любую клетку, подсчитать количество различных чисел в соседних с ней по стороне клетках и заменить число в клетке на полученный результат. Какое наибольшее количество четвёрок одновременно можно получить такими операциями? (*М. Лимонов, А. Шаповалов*)

89. Даны три попарно различных целых числа. Одно из них равно сумме двух остальных, а другое – произведению двух остальных. Какие это могут быть числа? (*Б. Френкин*)

90. Из пунктов А и Б навстречу друг другу одновременно выехали велосипедисты Алёша и Боря с одинаковыми постоянными скоростями. Через некоторое время из пункта

А в пункт Б на автомобиле с постоянной скоростью выехал Вася. Через 20 минут он догнал Алёшу, ещё через 20 минут встретил Борю, а ещё через 25 минут приехал в пункт Б. Во сколько раз скорость автомобиля превышает скорость велосипедистов? (*Б. Френкин*)

91. Можно ли отметить на плоскости шесть точек и провести шесть прямых так, чтобы на каждой прямой было две точки и по обе стороны от неё лежало по две отмеченные точки? (*А. Шаповалов*)

92. Есть 100 воздушных шариков. Известно, что как ни раздать эти шарики поровну 25 людям, хотя бы одному из них достанутся шарики как минимум трёх цветов. Каково наименьшее возможное количество цветов у этих 100 шариков? (*Н. Чернятьев*)

93. **а**) Натуральные числа от 1 до 2011 покрашены в два цвета. Числа 1 и 2011 красные, а числа 11 и 20 синие. Докажите, что можно выбрать пару красных и пару синих чисел с одинаковыми суммами.

б) Натуральные числа от 1 до 2011 покрашены в два цвета. Есть пара красных и пара синих чисел с одинаковыми произведениями. Докажите, что можно выбрать пару красных и пару синих чисел с одинаковыми суммами. (*А. Шаповалов*)

94. **а**) Петя задумал однозначное число. Вася может назвать своё число и спросить, чему равен наибольший общий делитель этих двух чисел. Какое наименьшее число он должен назвать, чтобы по ответу наверняка узнать Петино число?

б) Петя задумал натуральное число $k \le 2011$. Вася может назвать своё число n и спросить, чему равен НОД(k, n). При каком наименьшем n он сможет по ответу наверняка узнать k? (*А. Шаповалов*)

95. Разрежьте клетчатый квадрат 8×8 по границам клеток на семь частей с равными периметрами. (*А. Шаповалов*)

96. В пяти 15-литровых вёдрах налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается перелить из любого ведра в любое другое вдвое больше воды, чем в нём уже есть. Можно ли собрать всю воду в одном ведре?

97. Мальчик по четвергам и пятницам всегда говорит правду, а по вторникам всегда врёт. Однажды его семь дней подряд спрашивали, как его зовут. Шесть первых дней он давал такие ответы: Андрей, Борис, Андрей, Борис, Виктор, Борис. Какой ответ он дал на седьмой день? (*И. Рубанов*)

98. Большая свеча стоит 6 рублей и сгорает за час, а маленькая стоит 1 рубль 10 копеек и сгорает за 11 минут. Можно ли отмерить минуту, затратив не более 30 рублей?

99. Есть 100 гирек, массы которых равны 1 г, 2 г, …, 100 г. Заяц положил на одну чашу весов две гирьки. Волк хотел двумя другими гирьками уравновесить их, но не смог. Какие гирьки мог взять заяц? (*А. Шаповалов*)

100. Одно из трёх чисел равно среднему арифметическому двух остальных, второе – сумме двух остальных, а третье – произведению двух остальных. Найдите эти три числа. (*А. Шаповалов*)

101. В треугольнике ABC угол B равен 120°. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1 – биссектрисы этого треугольника. Из точки A_1 проведён перпендикуляр к прямой CC_1, а из точки C_1 – к прямой AA_1. Эти перпендикуляры пересекли прямую AC в точках A_2 и C_2 соответственно. Докажите, что B_1 – середина отрезка A_2C_2. (*Д. Швецов*)

102. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается катетов BC и AC в точках A_1 и B_1 соответственно. Описанная окружность треугольника A_1B_1C проходит через середину медианы CM треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

103. Каждая дорога сети связывает два города, не заходя в другие. Число дорог конечно, между каждыми двумя городами есть ровно один путь по дорогам (возможно, проходящий через другие города). Имеется ровно 20 тупиков, то есть городов, из которых выходит одна дорога. Маршрут автобуса проходит по кратчайшему пути между какими-то двумя городами, автобус ходит туда и обратно. Известно, что из каждого города в любой другой можно доехать автобусами не более чем с одной пересадкой. Каково наименьшее возможное число маршрутов (для любой такой сети)? (*Б. Френкин*)

104. За одну операцию разрешается отрезать по прямой линии от многоугольника равнобедренный треугольник. Всегда ли можно за несколько таких операций превратить произвольный четырёхугольник в трапецию? (*А. Шаповалов*)

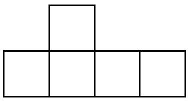
105. Петя написал на доске два корня и два младших коэффициента приведённого квадратного уравнения. Вася хочет определить роль каждого из чисел. Числа по модулю больше чем 2011, и Вася, не имея калькулятора, не может выполнять над ними арифметических действий. Однако он видит знаки этих чисел и может сравнивать, какое из двух чисел больше по абсолютной величине. Роли скольких чисел Вася заведомо может определить? (*Б. Френкин*)

106. В однокруговом турнире участвовали 12 шахматистов. Какое наименьшее количество дней мог длиться этот турнир, если каждый его участник играл не более одной партии в день и никакие две партии подряд не играл чёрными фигурами? (*А. Грибалко, С. Токарев*)

107. Точки E и F – середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. На основании AD взяли такие точки M и N, что $MEFN$ – равнобедренная трапеция. Докажите, что если M – середина AD, то N равноудалена от B и C. (*Д. Калинин*)

108. Обозначим через $\varphi(n)$ количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n, а через $\tau(n)$ – количество делителей числа n. Найдите все такие n, что $\varphi(n) + \tau(n) = n$. (*Г. Жуков*)

109. На клетчатый квадрат 4×4 положили несколько одинаковых фигурок пентамино, изображённых на рисунке (каждая фигурка накрывает пять клеток). Может ли каждая клетка квадрата быть покрыта одно и то же количество раз? (*М. Артемьев*)



Финал

110. У пяти пиратов 200 золотых монет, у всех разное количество. Два пирата могут провести обмен: сложить в кучку все имеющиеся у них монеты и поделить её пополам между собой, если это возможно. Капитан утверждает, что пиратам удалось распределить монеты поровну между собой за три обмена. Могут ли его слова быть правдой? (*Г. Кузнецов*)

111. В языке КОКОКОЛО три буквы: К, Л и О. Если в любом месте любого слова этого языка вставить или вычеркнуть любое из буквосочетаний ККО, ООЛ или ЛЛК, то смысл слова от этого не изменится. Одинаковы ли по смыслу слова КЛОК и КОЛОКОЛ? (*А. Шаповалов*)

112. **а**) Есть четыре яблока разной массы и чашечные весы без гирь. Всегда ли можно найти яблоко, чья масса ближе всего к средней массе всех яблок?

б) Та же задача для пяти яблок. (*А. Шаповалов*)

113. В первый раз на танцевальный кружок пришли 14 мальчиков и 14 девочек. Их разбили на пары по росту: самый высокий мальчик с самой высокой девочкой, второй по росту – со второй по росту и так далее. В каждой паре девочка оказалась выше мальчика. В следующий раз добавились один мальчик и одна девочка. Когда их всех опять разбили на пары по росту, в каждой паре мальчик оказался выше девочки. Для шуточного танца самого высокого мальчика поставили в пару с самой низкой девочкой, второго по росту – с предпоследней по росту и так далее. В скольких парах теперь мальчик выше девочки? (*А. Шаповалов*)

114. Клетки квадрата 6×6 раскрасили в девять цветов. Каждым цветом оказались окрашены четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям квадрата. Могут ли периметры всех этих прямоугольников быть попарно различными? (*А. Грибалко*)

115. **а**) На доске написаны все натуральные числа от 1 до 30. Миша и Ваня ходят по очереди, начинает Миша. За один ход нужно заменить любые два числа на их произведение. Если одно из двух последних оставшихся на доске чисел будет делиться на второе, то выигрывает Ваня, иначе – Миша. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

б) Та же задача, но первоначально на доске написаны числа от 1 до 102, а за один ход нужно заменить любые два числа на их сумму. (*Н. Чернятьев*)

116. На какое наибольшее число кучек можно разложить гири массами 1 г, 2 г, …, 16 г так, чтобы кучки нельзя было разделить на две группы равной массы? (*А. Шаповалов*)

117. **а**) Из 40 спичек выложен клетчатый квадрат 4×4 так, что каждую клетку ограничивают четыре спички. Как убрать 11 спичек так, чтобы оставшиеся не ограничивали никакой прямоугольник?

б) Из спичек выложен клетчатый квадрат 8×8 так, что каждую клетку ограничивают четыре спички. Какое наименьшее число спичек можно убрать так, чтобы не осталось ни одного контура прямоугольника? (*Д. Калинин*)

118. Было несколько брёвен различной длины. Все брёвна длины более 1 м распилили на метровые чурбаки, при этом от брёвен дробной длины (в метрах) остались обрезки. Брёвна, которые не пилили, тоже рассортировали на чурбаки и обрезки. Оказалось, что суммарная длина всех обрезков равна суммарной длине всех чурбаков. Каких брёвен было больше: целой или дробной длины? (*Б. Френкин*)

119. Винни-Пуху подарили 40 конфет. Несколько из них он съел, а остальными хотел угостить поровну трёх гостей. Но тут пришёл четвёртый гость. Пришлось хозяину съесть ещё три конфеты, чтобы количество оставшихся делилось на 4. Когда пришёл пятый гость, пришлось съесть ещё четыре конфеты, чтобы количество оставшихся делилось на 5. И тут пришёл шестой гость. Сколько конфет придётся съесть на этот раз, чтобы оставшиеся поделить поровну на шестерых? (*И. Раскина*)

120. За круглым столом сидят 30 учеников, некоторые из которых всегда говорят правду, а остальные всегда врут. Известно, что среди двух соседей каждого лжеца есть ровно один лжец. При опросе 12 учеников сказали, что ровно один из их соседей – лжец, а остальные сказали, что оба их соседа – лжецы. Сколько лжецов сидит за столом?

121. На прямой в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D так, что длины отрезков AB и CD не равны. По одну сторону от этой прямой построены равносторонние треугольники ABX, BCY, CDZ. Оказалось, что $XY = YZ$. Найдите углы треугольника XYZ.

122. На каждой клетке доски 10×10 находится указатель, направленный вверх, вправо, вниз или влево. В начальной позиции один из них направлен вниз, остальные – вверх. За один ход разрешается одновременно повернуть на $90°$ по часовой стрелке два указателя, находящиеся на соседних по стороне клетках. Докажите, что не удастся направить все указатели в одну сторону. (*А. Грибалко*)

123. В записи точного квадрата ровно **а**) 100 цифр; **б**) 1000000 цифр. Может ли чётных и нечётных цифр быть поровну? (*А. Шаповалов*)

124. В треугольнике ABC угол B равен $135°$. На стороне AC отмечены такие точки M и N (точка M лежит между A и N), что прямые BM и BN перпендикулярны. В треугольниках ABM и CBN проведены биссектрисы MP и NQ. Докажите, что точка, симметричная точке B относительно прямой PQ, лежит на AC. (*Д. Швецов, Д. Прокопенко*)

125. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ выбраны точки P и Q так, что $\angle BAP = 15°$ и $\angle CPQ = 30°$. Найдите угол PAQ. (*Д. Швецов*)

126. Вася нарисовал на плоскости прямоугольники со сторонами, параллельными осям координат, и покрасил их в три цвета. Оказалось, что каждые два прямоугольника разного цвета имеют общую точку. Докажите, что все прямоугольники одного из цветов имеют общую точку. (*А. Акопян*)

127. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник *ABC* по стороне *AB* и углам *CAM* и *CBM*, где *M* – точка пересечения медиан. (*А. Шаповалов*)

128. Что больше: $m^2+\sqrt{m^2+m}$ или $n^2-\sqrt{n^2-n}$, если m и n – натуральные числа, причём $m<n$? (*Б. Френкин*)

129. 100 монет достоинствами в 1, 2, …, 100 пиастров разложили в 76 кошельков (в каждом что-то есть). Разрешается объединять все деньги из любых двух кошельков в один. Докажите, что такими объединениями можно оставить только два непустых кошелька с равными суммами денег. (*А. Шаповалов*)

130. По кругу написаны числа, причём каждое равно разности следующего и предыдущего по часовой стрелке. Какие это могут быть числа? (*Б. Френкин*)

131. Клетчатый квадрат $2k\times 2k$ разрезали по границам клеток на несколько частей и сложили из них квадратную рамку толщиной в одну клетку. Каково наименьшее возможное количество частей? (*А. Шаповалов*)

Источник: http://tursavin.ru