XX турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2014 года

Личная олимпиада

1. Существует ли трёхзначное число, у которого сумма цифр равна наибольшему простому делителю этого числа? (*А. Шаповалов*)

2. Квадрат разрезали на два равных прямоугольника и сложили из них букву Т (без наложений). Найдите сторону квадрата, если периметр получившейся фигуры равен 120 см. (*А. Шаповалов*)

3. Осенью «Зенит» установил рекорд Лиги чемпионов: в турнире из четырёх команд в два круга занял «чистое» второе место всего с 6 набранными очками. Можно ли побить этот рекорд, то есть занять в таком же турнире «чистое» второе место с меньшим числом очков? За победу начисляется 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. «Чистое» место означает, что больше нет команд, набравших столько же очков. (*А. Блинков*)

4. Семь бизнесменов и четыре телохранителя подошли к переправе. Есть трёхместная лодка. Бизнесмен не может быть на берегу, если там нет телохранителей (в лодке – может), но чувствует себя комфортно только в том случае, когда там, где он находится (на берегу или в лодке), бизнесменов больше, чем телохранителей. Как им всем комфортно переправиться на противоположный берег? (*А. Шаповалов*)

5. Если и длину, и ширину прямоугольника увеличить на 3 метра, то его площадь увеличится на 60 м^2. А как изменится его площадь, если вместо этого увеличить и длину, и ширину на 2 метра? (*И. Раскина*)

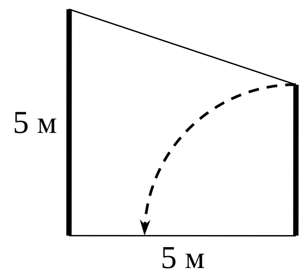
6. На доске 16×16 центральный квадрат 8×8 заполнили пешками. Можно ли на свободные клетки расставить 32 коней так, чтобы каждая из оставшихся свободных клеток этой доски была под боем коня? (*А. Шаповалов*)

7. На острове каннибалов живут два племени: канни и балы. В каждом племени есть и правши, и левши. У балов правши всегда говорят правду, а левши всегда врут. У канни правши врут своим соплеменникам и говорят правду балам, а левши, наоборот, говорят правду своим соплеменникам и врут балам. Когда на остров попадает путешественник, ему любезно сообщают всё это и предлагают записать на бумажке вопрос. Затем каждый островитянин задаёт этот вопрос остальным. Если путешественник после всех ответов сможет определить для каждого островитянина его племя и «любимую» руку, то его отпускают с миром, а если хоть раз ошибётся – съедают на ужин. Какой вопрос можно записать, чтобы не попасть на ужин к каннибалам? (*Э. Акопян, Д. Калинин*)

8. Клетчатый многоугольник можно разрезать по границам клеток на одинаковые трёхклеточные фигуры, а можно – на одинаковые четырёхклеточные. Обязательно ли его можно разрезать на двухклеточные фигуры? (*А. Шаповалов*)

9. На столе по кругу лежат монеты в 50 копеек, 2 рубля и 10 рублей. У полтинников сосед по часовой стрелке лежит орлом вверх, а против часовой стрелки – решкой вверх, у двухрублёвых монет – наоборот, а у десятирублёвок оба соседа лежат одинаково: оба орлом или оба решкой вверх. Может ли на столе лежать в сумме ровно 2014 рублей? (*А. Шаповалов*)

10. У кирпича сумма длин всех 12 рёбер равна 100 см. Длину каждого ребра увеличили на 1 см. На сколько увеличилась площадь поверхности кирпича? (*А. Шаповалов, А. Заславский*)



11. У прямой дороги на расстоянии 5 метров друг от друга стояли два столба. Высота более высокого столба тоже 5 метров. Между верхушками столбов был натянут провод. Подул ветер, и маленький столб упал на дорогу в направлении высокого столба (см. рисунок). Что стало с проводом: он провис, снова оказался натянут или порвался? (*М. Раскин, Е. Бакаев*)

12. 50 бизнесменов – японцы, корейцы и китайцы – сидят за круглым столом. Известно, что между каждыми двумя ближайшими японцами сидит ровно столько китайцев, сколько всего за столом корейцев. Сколько китайцев может быть за столом? (*А. Хачатурян*)

13. У барона Мюнхгаузена есть четырёхугольник, в котором длина большей диагонали равна 10 см. Он разрезал его на четыре треугольника и утверждает, что у каждого из них самая длинная сторона также равна 10 см. Могут ли слова барона быть правдой? (*А. Шаповалов*)

14. В прямоугольном треугольнике ABC угол B равен 60°. К гипотенузе AB проведена медиана CM, которая пересекает вписанную окружность в точках P и Q. Докажите, что $PM = CQ$. (*Д. Швецов*)

15. Король приказал чеканить монеты. Порядок выпуска монет был определён так. Сначала чеканятся монеты наименьшей стоимости: 1 крона. Затем на каждом следующем шаге казначей определяет наименьшую целочисленную сумму, которую нельзя набрать k или меньшим числом уже отчеканенных монет, и выпускаются монеты достоинством в эту сумму. При каких k в королевстве будет выпущена монета достоинством в 2014 крон? (*Д. Калинин*)

16. Можно ли число 2014 представить в виде суммы 99 натуральных чисел с одинаковыми суммами цифр? (*А. Шаповалов*)

17. К двум равным окружностям с центрами O_1 и O_2 проведены две общие внешние касательные и одна общая внутренняя, которая пересекла внешние в точках A и B. Докажите, что $AB = O_1O_2$. (*М. Волчкевич*)

18. При розыгрыше кубка по теннису участники разбиваются на пары и играют партии, после чего проигравшие выбывают, победители снова разбиваются на пары и так далее (ничьих в теннисе не бывает). Если в очередном туре нечётное количество участников, то один из них «отдыхает» и проходит в следующий тур. В одном таком турнире «отдыхающий» был в каждом туре, кроме последнего. В следующем турнире участвовали те же игроки, кроме одного. В скольких турах были «отдыхающие» в этот раз? (*Б. Френкин*)

19. Решите в положительных числах систему уравнений $x-\frac{1}{y^2}=y-\frac{1}{z^2}=z-\frac{1}{x^2}$.

20. Каждый из двух равных четырёхугольников разрезали на два треугольника. Среди треугольников нет равных. Могут ли все треугольники быть подобны? (*А. Шаповалов*)

21. Петя и Вася по очереди ставят ладьи на крайние клетки доски 9×9 так, чтобы каждая выставленная ладья оказалась под боем чётного количества ладей, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

22. В одиночных камерах сидят четыре друга-математика. Каждому из них сообщили, что их номера в списке заключённых различны, двузначны и один из этих номеров равен сумме трёх других. Но, даже узнав номера остальных троих, никто из друзей не смог вычислить свой номер. Так какие же у них были номера? (*А. Шаповалов*)

23. Вписанная окружность прямоугольного треугольника ABC касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Прямая AA_1 пересекает вписанную окружность в точке P. Докажите, что центр описанной окружности треугольника AB_1P лежит на прямой A_1B_1. (*Д. Швецов*)

24. Андрей закрасил некоторые клетки квадрата 100×100. Далее ему разрешается закрашивать клетки по следующему правилу: если в квадрате 2×2 закрашено три клетки, то он может закрасить четвёртую. Какое наименьшее количество клеток Андрей должен был закрасить изначально, чтобы в дальнейшем он сумел закрасить весь квадрат? (*А. Гаркавый*)

25. Пусть a, b, c – натуральные числа. Обязательно ли из неравенства $a > \left[\frac{b}{c}\right]$ следует неравенство $ac > b$? (*П. Дубов*)

26. Через внутреннюю точку D стороны AB треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам AC и BC, которые пересекают их в точках E и F. Оказалось, что $ABEF$ – вписанный четырёхугольник. Докажите, что описанная окружность треугольника DEF касается стороны AB. (*А. Блинков*)

27. Дана возрастающая арифметическая прогрессия из натуральных чисел. Известно, что у каждого числа ровно два различных простых делителя, причём для всех членов прогрессии эта пара одна и та же. Каково наибольшее возможное количество членов в такой прогрессии? (*Б. Френкин*)

28. Из вершины A треугольника ABC провели высоту AD и диаметр описанной окружности, который пересёк сторону BC в точке E. Докажите, что описанная окружность треугольника ADE касается окружности, проходящей через середины сторон треугольника ABC. (*Д. Прокопенко*)

Командная олимпиада и нулевой тур

29. В десятизначном числе все цифры различны. Петя по одной стирал цифры, начиная слева, пока не осталась одна цифра. Он утверждает, что каждый раз оставшееся число делилось на стёртую цифру. Может ли это быть правдой? (*Б. Френкин*)

30. Дети шли взвешиваться и по дороге высказывали друг другу предположения. В результате оказалось, что все массы детей различны и каждая девочка легче каждого мальчика. Кроме того, каждое предположение, высказанное лицу другого пола, оказалось неверным, а лицу своего пола – верным.

а) Сохранились реплики троих из них, обращённые друг к другу. Женя – Саше: «Маша легче меня». Саша – Маше: «Женя легче меня». Маша – Жене: «Саша легче меня». Определите пол Жени и Саши.

б) Сохранились реплики четверых из них, обращённые друг к другу. Миша – Саше: «Я легче Вали». Саша – Вале: «Я легче Жени». Валя – Жене: «Я легче Миши». Женя – Мише: «Я легче Саши». Определите пол Вали, Жени и Саши. (*А. Шаповалов*)

31. Саша поехал на автомобиле из Костромы в Судиславль. У него с собой есть настольные электронные часы, которые показывают время от 00:00 до 23:59 (цифры изображены на рисунке). По приезде в Судиславль Саша заметил, что если поставить часы вверх ногами, то они будут показывать время выезда из Костромы (единица при переворачивании становится единицей). Сколько времени с точностью до минуты Саша был в пути, если известно, что оно составляет **а**) не больше часа (время на часах за время поездки изменилось); **б**) больше двух, но меньше трёх часов? (*А. Грибалко*)

32. **а**) Клетки квадрата 9×9 окрашены в два цвета. Если разрезать его на горизонтальные полоски 1×9, то все они будут окрашены одинаково. Докажите, что если разрезать квадрат на вертикальные полоски 1×9, то найдутся две одинаково окрашенные полоски. Полоски окрашены одинаково, если их можно наложить друг на друга так, чтобы цвета клеток совпали. (*А. Шаповалов*)

б) Докажите то же утверждение, если клетки квадрата окрашены в три цвета. (*А. Шаповалов, А. Грибалко*)

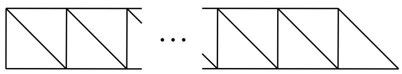
33. Можно ли на клетчатой плоскости нарисовать шесть клетчатых многоугольников одинаковой площади так, чтобы никакие два из них не накрывали одну и ту же клетку, но при этом у каждых двух многоугольников была хотя бы одна общая точка границы? (Э. *Акопян*)

34. **а**) На тараканьих бегах пять тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту и бегут с постоянными скоростями. Через минуту после своего старта каждый последующий таракан догнал предыдущего. Через сколько секунд после своего старта последний таракан догнал первого?

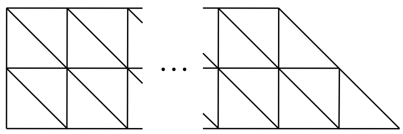
б) На тараканьих бегах 20 тараканов выбегают друг за другом с интервалом в 1 минуту и бегут с постоянными скоростями. Второй догнал первого через 2 минуты после своего старта, третий второго – через 3 минуты после своего старта, …, двадцатый девятнадцатого – через 20 минут после своего старта. Через сколько минут после своего старта двадцатый таракан догнал первого?

в) На черепашьих бегах черепахи выползают друг за другом с интервалом в 1 минуту и ползут с постоянными скоростями. Каждой из черепах, кроме первой, удалось догнать предыдущую, причём второй для этого понадобилось на минуту меньше, чем третьей, третьей – на минуту меньше, чем четвёртой, и так далее. Последняя черепаха догнала первую через 5 минут после своего старта. Через сколько минут после своего старта 64-я черепаха догнала 16-ю? (*А. Шаповалов*)

35. **а**) В каждом квадрате клетчатой полоски 1×43 провели по диагонали и справа пририсовали ещё один треугольник (см. рисунок). Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок красит неокрашенную сторону одного из получившихся треугольников в красный или синий цвет по своему усмотрению. Запрещено красить три стороны треугольника в один цвет. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?



б) Прямоугольная трапеция с основаниями длины 100 и 102 разбита на 404 малых треугольника с катетами 1 (см. рисунок). Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом игрок красит неокрашенную сторону одного из малых треугольников в красный или синий цвет по своему усмотрению. Запрещено красить три стороны малого треугольника в один цвет. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)



36. В пещере лежали в ряд 100 мешков массами 1 кг и 2 кг. В некоторых разбойники хранили золото, в остальных – серебро. Рядом с каждым двухкилограммовым мешком лежали два мешка с серебром, а рядом с каждым килограммовым – хотя бы один мешок с серебром. Али-Баба унёс из пещеры всё золото. Какое наибольшее количество золота ему могло достаться? (*А. Шаповалов*)

37. В вершинах квадрата записано четыре двузначных числа. Сумма чисел на верхней стороне в 4 раза больше, чем на нижней, а сумма чисел на левой стороне в 5 раз больше, чем на правой. Найдите числа в вершинах. (*А. Шаповалов*)

38. С помощью циркуля и линейки разделите треугольник на два меньших треугольника и проведите в одном из них медиану, а в другом – высоту так, чтобы эти отрезки были параллельны. (*А. Шаповалов*)

39. **а**) Выпуклый многоугольник разбит непересекающимися диагоналями на треугольники. Можно ли стороны и диагонали раскрасить в жёлтый и красный цвета так, чтобы жук мог проползти из каждой вершины в любую другую по жёлтым отрезкам, а клоп – по красным?

б) Полоска $1 \times n$ разбита на единичные клетки. Можно ли стороны клеток раскрасить в три цвета так, чтобы при выкидывании отрезков любого из цветов по оставшимся отрезкам можно было пройти из каждой вершины в любую другую? (*А. Шаповалов*)

40. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL и высота BH. Оказалось, что серединный перпендикуляр к отрезку LH пересекает сторону AB в её середине. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный. (*А. Шаповалов*)

41. Костя выбрал два последовательных четырёхзначных числа и приписал одно из них к другому. Он утверждает, что полученное восьмизначное число делится на 137. Могут ли его слова быть правдой? (*К. Кноп*)

42. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке I. Точки M и N – середины сторон AB и BC. Прямая MN пересекает прямые AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2. Докажите, что ортоцентр треугольника A_2IC_2 лежит на прямой AC. (*Д. Швецов*)

43. Из шести палочек разных длин сложили два треугольника одинакового периметра. Длины палочек отличаются не более чем в 7 раз. Всегда ли из них можно сложить два треугольника разного периметра? (*А. Шаповалов*)

44. Серединный перпендикуляр к стороне AB вписанного четырёхугольника $ABCD$ пересекает диагональ AC в точке P. Серединный перпендикуляр к стороне CD пересекает диагональ BD в точке Q. Докажите, что прямые PQ и AD параллельны. (*Д. Швецов*)

45. Три трёхзначных числа, полученные циклическими перестановками трёх различных цифр, образуют геометрическую прогрессию. Найдите её знаменатель. (*А. Заславский*)

46. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно. Докажите, что прямые, содержащие перпендикуляры, опущенные из A на EF, из B на AE и из D на AF, пересекаются в одной точке. (*А. Гаркавый*)

47. На берегу круглого острова стоит 12 игральных автоматов, из них один у пристани. На пристань приезжает Петя, играет на автомате и идёт к соседнему автомату: если игра была удачной, то по часовой стрелке, а если неудачной – против часовой стрелки. Далее Петя действует аналогично. Как только Петя снова оказывается у пристани, он уезжает, не играя на автомате. В итоге на всех автоматах он играл разное количество раз. Докажите, что удачных игр было не меньше 33. (*Б. Френкин*)

48. Петя и Вася по очереди занимают свободные клетки доски 13×13, начинает Петя. Он ходит в любую клетку, а Вася обязан ходить в клетку, соседнюю по стороне с той, куда только что сходил Петя. Если все соседние клетки уже заняты (и только в этом случае), Вася пропускает ход, платит Пете рубль, и игра продолжается. А заканчивается игра, когда все клетки будут заняты. Какое наибольшее число рублей может гарантировать себе Петя, как бы ни играл Вася? (*А. Шаповалов*)

49. В треугольнике ABC проведена высота BH. Вписанная окружность треугольника касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что ортоцентры треугольников AC_1B_1 и CA_1B_1, а также точки H и B_1 лежат на одной окружности. (*Д. Швецов*)

Первый тур

50. Решите ребус ТЫ + ТЫ + ТЫ + ТЫ + ТЫ = ВЫ. (*Д. Шноль*)

51. В лифте **а**) 40-этажного; **б**) 2014-этажного небоскрёба есть только две кнопки: «−3» и «×2». При нажатии на кнопку лифт соответственно вычитает из номера текущего этажа

3 или умножает его на 2 и, если такой этаж есть, едет на него. Гриша зашёл в лифт на первом этаже. До каких этажей Гриша сможет доехать, а до каких не сможет? (*Е. Бакаев*)

52. У Васи столько же орехов, сколько у Лёвы и Гены вместе. У Васи и Гены вместе орехов вдвое больше, чем у Лёвы. Во сколько раз у Васи и Лёвы вместе орехов больше, чем у Гены? (*А. Шаповалов*)

53. **а**) Можно ли отметить несколько клеток в квадрате 20×20 так, чтобы в каждом квадрате 7×7 оказалось ровно 14 отмеченных клеток?

б) Кощей даёт Ивану клетчатый прямоугольник и предлагает отметить некоторые его клетки так, чтобы в каждом квадрате с указанной Кощеем стороной (меньшей, чем стороны прямоугольника) оказалось названное им число отмеченных клеток (меньшее числа клеток в квадрате). Всегда ли Иван сможет выполнить задание?

54. За круглым столом сидят десять человек, пронумерованных по часовой стрелке числами от 1 до 10. Каждый из сидящих либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда врёт. Первый сказал: «Мой сосед слева – лжец», второй: «Два ближайших ко мне человека слева – лжецы», третий: «Три ближайших ко мне человека слева – лжецы», …, десятый: «Десять ближайших ко мне человек слева – лжецы». Сколько среди них могло быть лжецов? (*Д. Кузнецов*)

55. Балда и Вакула соревновались в езде на чертях по равнине (скорость каждого участника постоянна). Сначала Балда ехал по маршруту АБВГ, а Вакула – по АВБГ. Стартовали они вместе и приехали в Г одновременно. Затем Балда поехал по маршруту ГБА, а Вакула – по ГВА, и снова они затратили на путь одно и то же время. Жюри решило, что Балда должен стартовать из В, а Вакула – из Б. Кто первым прибудет в А, того и считать победителем. Верно ли, что победит быстрейший?

56. Красные, синие и зелёные дети встали в круг. Когда учительница попросила поднять руку красных детей, рядом с которыми стоит зелёный ребёнок, руку подняло 20 человек. А когда она попросила поднять руку синих детей, рядом с которыми стоит зелёный ребёнок, руку подняло 25 человек. Докажите, что рядом с кем-то из поднимавших руку стоят сразу двое зелёных детей. (*А. Голованов*)

57. **а**) Гном-отец и гном-сын хотят переправить боевую группу эльфов из своего дома в Тайное место в тылу орков. Переправляются подземными тропами в одиночку или по двое. Не запомнив дороги, без проводника её не пройти. Вначале дорогу до Тайного места знает только гном-отец. Но всех проводить он не сможет: мимо Каменного стража у дороги каждый может пройти не более четырёх раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Гном запоминает дорогу, если его провели один раз, а эльфа для этого надо провести туда и обратно. Окончив переправу, гномы должны вернуться домой. Могут ли гномы переправить группу из шести эльфов?

б) Какое наибольшее число эльфов можно переправить в условиях пункта а)?

в) Та же задача для семьи гномов из отца и трёх сыновей. (*А. Шаповалов*)

58. Известно, что КИС + КИС + КИС = МЯУ и МЯУ + МЯУ = ГАВ. Что больше: КИТ + КИТ или ВАУ? (*Д. Шноль*)

59. **а**) На шахматной доске расставлены фишки: 16 на чёрных клетках и 15 на белых. Докажите, что какие-то две из них находятся на соседних по стороне клетках.

б) На шахматной доске расставили 31 фишку так, что никакие две из них не находятся на соседних по стороне клетках. Известно, что на чёрных клетках фишек больше, чем на белых. Какое наибольшее число фишек может находиться на белых клетках?

60. Известно, что для натуральных чисел m и n, больших 1, выполнено равенство $2m = n^2 + 1$. Верно ли, что число m можно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел?

61. Внутри равностороннего треугольника требуется отметить точку, соединить её с вершинами и разрезать треугольник по этим отрезкам. Удастся ли выбрать точку так, чтобы из полученных треугольников можно было сложить другой треугольник?
(*А. Банникова*)

62. Точка K расположена на основании AC равнобедренного треугольника ABC так, что $AK = 20$, $CK = 14$. Точки L и M симметричны точке K относительно боковых сторон треугольника. Серединный перпендикуляр к отрезку LM пересекает прямую AC в точке N. Найдите длину отрезка KN. (*Е. Бакаев*)

63. Шесть команд в однокруговом турнире набрали 10, 7, 6, 6, 3 и 3 очка. Сколько очков (не обязательно целое число) начислялось за победу, если за ничью давалось 1 очко, а за поражение – 0? (*А. Шаповалов*)

64. Клетки прямоугольной доски раскрасили в несколько цветов так, что каждым цветом оказались раскрашены четыре клетки, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными краям доски. Докажите, что если длина стороны одной клетки равна 1, то сумма периметров всех этих прямоугольников делится на 4. (*А. Грибалко*)

65. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены общая внешняя и общая внутренняя касательные. Обозначим через A и B точки касания внешней касательной, а через C и D – точки касания внутренней касательной с окружностями ω_1 и ω_2 соответственно. Описанная окружность треугольника ABC повторно пересекает ω_2 в точке E. Найдите угол CED. (*Д. Швецов*)

66. На шахматной доске стоит 15 фишек – по одной на каждой клетке нижней горизонтали и левой вертикали. Фишки можно передвигать на соседние по стороне клетки, причём на клетку, где побывала фишка, нельзя ставить никакую другую. Какое наибольшее количество фишек может оказаться на 15 клетках верхней горизонтали и правой вертикали?

67. В куче лежит 100 палочек, длины которых равны 1, 2, …, 100. Петя и Вася по очереди берут из кучи по три палочки и складывают из них треугольники, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

68. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{k!}+\frac{1}{m!}+\frac{1}{n!}=\frac{1}{r!}$.

69. На доску последовательно выписывают числа вида $n^2 - 7n + 47$ при $n = 1, 2, \ldots$ Какое наибольшее количество простых чисел будет выписано подряд?

70. Саша написал программу, которая последовательно вычисляет сумму натуральных чисел, начиная с 2014, убирая при этом в каждом слагаемом произвольно одну цифру в десятичной записи (разрешается убирать и первую цифру, даже если после неё стоит нуль). Программа должна закончить работу, как только полученная на очередном шаге сумма будет делиться на 3. Может ли так случиться, что программа будет работать бесконечно? (*А. Грибалко*)

71. В окружность с центром O вписан треугольник ABC с указанным ортоцентром H. Одной линейкой разделите треугольник ABC на две равновеликие фигуры – треугольник и четырёхугольник. (*Г. Филипповский*)

72. В треугольнике ABC с углом B, равным 60°, проведены высоты AA_1 и CC_1. Точка M – середина стороны AC. Докажите, что точка, симметричная M относительно A_1C_1, равноудалена от прямых AB и BC.

73. В турнире участвовало несколько шахматистов, каждые двое сыграли друг с другом не более одной партии. Перед началом турнира у каждого из них был некоторый рейтинг – целое число, причём все рейтинги были различны. После окончания турнира рейтинг каждого шахматиста увеличили на количество его побед и уменьшили на количество поражений. При этом все рейтинги снова оказались различными, но шли уже в обратном порядке (то есть первый стал последним, второй – предпоследним и так далее). Докажите, что каждые два шахматиста сыграли партию на турнире. (*А. Грибалко*)

74. Для каждого натурального n найдите такое наименьшее число K_n, что для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из отрезка [0, 1] верно неравенство $K_n \geq S_n - P_n$, где $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $P_n = a_1a_2\ldots a_n$. (*Д. Аубекеров*)

75. На плоскости нарисовано три красных и несколько синих лучей так, что никакие два из них не параллельны одной прямой и все углы между красными лучами тупые. Докажите, что можно нарисовать ещё один луч, который не пересечёт красных лучей, но пересечёт не менее трети синих лучей. (*А. Шаповалов*)

Второй тур

76. На каждой клетке доски стоит по гному – рыцарю, который всегда говорит правду, или лжецу, который всегда врёт. Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной.

а) Какое наибольшее число гномов на доске 20×20 могли бы сказать фразу «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей»?

б) Каждый гном на шахматной доске сказал: «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей». Каково наибольшее возможное число рыцарей? (*А. Шаповалов*)

77. Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого все цифры различны и сумма каждых двух из них является составным числом.

78. Лыжная трасса АБВ идёт по прямой, причём пункт Б находится ровно посередине между пунктами А и В. Три лыжника Иванов, Петров и Сидоров одновременно начали забег, при этом Иванов и Петров двигались из пункта Б в пункт В, а Сидоров – из пункта В в пункт Б. Иванов и Сидоров встретились как раз в тот момент, когда Петров дошёл до пункта В. На следующий день Иванов и Сидоров двигались из пункта Б в пункт А, а Петров – из пункта В в пункт А. Петров догнал Сидорова. Где в этот момент находился Иванов?

79. Решите ребус ПЕ $\cdot$ РЕ $=$ БОР. (*А. Шаповалов*)

80. Каждый из 38 попугаев завязал на удаве по одному узлу. Если сложить удава вдвое или втрое, то каждый узел попадёт ровно на один другой. Докажите, что если удава сложить вшестеро, то какой-то узел попадёт на сгиб. (*Р. Семизаров*)

81. Из шести неразличимых на вид монет две фальшивые – они весят одинаково и легче настоящих. Есть чашечные весы, за каждое взвешивание на которых надо заплатить одну монету. Если уплаченная монета настоящая, весы показывают правильный результат, а если фальшивая, – могут показать что угодно. Как найти (и не потратить) одну настоящую монету? (*В. Клепцын, А. Заславский*)

82. **а**) На доске написано 100 обыкновенных дробей, все они не равны 0. Если перевернуть все дроби с нечётными знаменателями, то произведение всех 100 дробей будет равно 20,14. А чему будет равно произведение всех 100 дробей, если вместо этого перевернуть все дроби с чётными знаменателями?

б) На доске написано 100 обыкновенных дробей, все они больше 0. Если перевернуть все дроби с чётными знаменателями, то произведение всех 100 дробей будет равно $\frac{3}{20}$. Если бы вместо этого перевернули все дроби со знаменателями, кратными 5, произведение всех 100 дробей стало бы равно $\frac{4}{15}$. Во сколько раз произведение дробей с чётными знаменателями больше произведения дробей со знаменателями, кратными 5? (*А. Шаповалов*)

83. **а**) Есть 125 единичных кубиков. Петя покрасил каждую грань каждого кубика либо в белый, либо в чёрный цвет. Вася мечтает из всех кубиков сложить куб с ребром длины 5, у которого каждая грань одноцветна. Мог ли Петя покрасить кубики так, чтобы Васина мечта не сбылась?

б) Та же задача для 729 единичных кубиков и куба с ребром длины 9.

в) Есть 1000 единичных кубиков. Они как-то раскрашены в два цвета (возможно, по-разному), каждая грань одноцветна. Докажите, что из всех кубиков можно сложить куб с ребром длины 10, у которого каждая грань одноцветна.

г) Есть n^3 единичных кубиков. Петя раскрашивает их в два цвета (возможно, по-разному), каждую грань – в один цвет. Вася победит, если сможет сложить из всех кубиков куб с ребром длины n, у которого каждая грань одноцветна. При каком наименьшем $n > 1$ Петя не сможет ему помешать? (*А. Шаповалов*)

84. Коля написал натуральное число, все цифры которого различны. Если поменять местами любые две цифры этого числа, отличающиеся на 1, то оно увеличится, а если поменять любые две цифры, отличающиеся на 2, то оно уменьшится. Какое наибольшее число мог написать Коля? (*Н. Чернятьев*)

85. Известно, что $a^2 - bc = b^2 - ca = c^2 - ab \neq 0$. Какие значения может принимать выражение $\dfrac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$?

86. В равностороннем треугольнике ABC на продолжении стороны AB за точку B отметили точку D, а на продолжении CB за точку B – точку E так, что $AD = BE$. Докажите, что $DC = DE$. (*Е. Бакаев*)

87. Дан квадрат $ABCD$. Проведены две окружности с центрами B и D и радиусами, равными стороне квадрата. На первой окружности взята точка K вне квадрата. Прямые KA и KC пересекают вторую окружность в точках M и N. Докажите, что MN – диаметр второй окружности. (*Е. Бакаев*)

88. **а**) Таблица 4×4 заполнена числами. Петя переставил её столбцы так, что никакой столбец не остался на месте. В получившейся таблице Вася переставил строки так, что никакая строка не осталась на месте. В итоге получилась исходная таблица. Каково наибольшее возможное количество различных чисел в ней?

б) Та же задача для таблицы 5×5. (*Б. Френкин*)

89. Дан квадрат $ABCD$. Точка O выбрана так, что $\angle AOC = 45°$. Перпендикуляр, восстановленный к AO в точке A, пересекает прямую OC в точке A_1. Перпендикуляр, восстановленный к CO в точке C, пересекает прямую OA в точке C_1. Докажите, что на прямой A_1C_1 лежит одна из вершин квадрата. (*Д. Мухин*)

90. Рассматривается n прямых, содержащих стороны n-угольника. Какое наибольшее количество окружностей может касаться всех этих прямых?

91. Известно, что $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a+b+c}$. Докажите, что $\dfrac{1}{a^n} + \dfrac{1}{b^n} + \dfrac{1}{c^n} = \dfrac{1}{a^n + b^n + c^n}$ для всякого нечётного n.

92. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что $AB = BC = CD$ и $\angle AOD = 120°$. Докажите, что $AO = DO$. (*Е. Бакаев*)

93. Назовём натуральное число полуквадратом, если оно представимо в виде ab^2, где a и b взаимно просты, $b > 1$. Какое наибольшее количество последовательных чисел могут быть не полуквадратами? (*А. Шаповалов*)

94. Окружность с центром I вписана в прямоугольный треугольник ABC и касается его катетов AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Перпендикуляр, опущенный из точки A_1 на прямую AI, пересекает перпендикуляр, опущенный из точки B_1 на прямую BI, в точке P. Докажите, что прямые AB и CP перпендикулярны. (*Д. Швецов*)

95. Петя написал на доске натуральное число, а потом стёр последнюю цифру и написал её чуть выше, в показателе степени. Оказалось, что результат делится на первое написанное число. Какое максимальное число мог написать Петя? (*А. Шаповалов*)

96. В однокруговом футбольном турнире участвовало $n > 2$ команд. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Оказалось, что все команды, кроме команды «Козлы», набрали одинаковое число очков, причём «Козлы» не со всеми командами сыграли одинаково. Найдите наименьшее значение n, если «Козлы» заняли первое место. (*А. Блинков*)

97. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{1}{a^2+b^2+2c^2}+\frac{1}{b^2+c^2+2a^2}+\frac{1}{c^2+a^2+2b^2}\le\frac{1}{a^2+b^2+2ab}+\frac{1}{b^2+c^2+2bc}+\frac{1}{c^2+a^2+2ca}.$$

(*Д. Аубекеров*)

98. На доске нарисованы три прямые, проходящие через одну точку и образующие попарно углы в 60°, а также 2014 точек. Петя выписал на доске все расстояния от этих точек до прямых. Могли ли числа на доске образовывать в некотором порядке арифметическую прогрессию? (*А. Грибалко*)

99. Через вершину A треугольника ABC проведена прямая l, параллельная BC. Симедиана треугольника, проведённая из вершины B, повторно пересекает описанную окружность треугольника в точке D. Прямые CD и l пересекаются в точке E. Докажите, что $\angle ABC = \angle EMA$, где M – середина AC. (*А. Зерцалов*)

Третий тур

100. **а**) В таблицу 5×5 вписали числа 1, 2, 3, 4, 5, каждое по пять раз, так, что для одной из главных диагоналей сумма чисел над ней оказалась ровно в 3 раза больше суммы чисел под этой диагональю. Найдите число, вписанное в центральную клетку таблицы.

б) Та же задача для таблицы 7×7, в которую вписали числа от 1 до 7, каждое по семь раз. (*А. Шаповалов*)

101. Килограмм яблок стоил целое число рублей, меньшее 100. Продавец поменял местами цифры на ценнике. В результате цена яблок увеличилась на 20%. Сколько стоил килограмм яблок до подорожания?

102. Квадрат разрезали на восемь квадратиков. Обязательно ли среди них найдётся семь одинаковых? (*О. Нечаева*)

103. В однокруговом футбольном турнире участвовало десять команд. Могло ли после окончания турнира оказаться, что у каждой команды количество побед, ничьих и поражений одинаково?

104. Шахматную доску разбили на двухклеточные доминошки, после чего конь обошёл все клетки доски, побывав на каждой по разу. Назовём весом доминошки количество ходов, которое сделал конь между её клетками. Могут ли веса всех доминошек оказаться **а**) различными; **б**) равными? (*А. Грибалко*)

105. На левой чаше весов лежит головка сыра. Федя должен разрезать её **а**) на четыре куска; **б**) на десять кусков, массы всех кусков должны быть различны. Затем Федя каждым ходом перекладывает от одного до трёх кусков: с левой чаши на правую, с правой – на левую, опять с левой на правую и так далее, пока все куски не окажутся на правой чаше. Каждый раз переложенные куски взвешиваются, и если их суммарная масса ранее не встречалась, то Федя платит рубль. Какую наименьшую сумму придётся заплатить Феде? (*А. Шаповалов*)

106. Костя и его родители родились 1 апреля. 1 апреля 2013 года Костя стал в 4 раза моложе мамы, а 1 апреля 2014 года – в 4 раза моложе папы. Кто из Костиных родителей старше и на сколько лет?

107. Вася и Петя живут в одном подъезде, но на разных этажах. Отправляясь в школу, они почти одновременно вызывают лифт. Лифт приходит по вызову, если он свободен. Если лифт занят, он останавливается по вызову в том и только в том случае, когда едет вниз (лифт занят с момента вызова и до выхода всех пассажиров). В понедельник Вася вызвал лифт раньше, чем Петя, и они приехали на первый этаж вместе. Во вторник Вася снова вызвал лифт первым, но они приехали вниз порознь. В среду первым вызвал лифт Петя. Во всех случаях лифт был свободен. Вместе или порознь Вася и Петя приедут на первый этаж или это нельзя определить? (*Б. Френкин*)

108. В классе учится 20 мальчиков и 14 девочек. Однажды трое детей из этого класса сделали следующие утверждения. Катя: «Каждый мальчик в нашем классе дружит менее чем с десятью девочками». Рома: «В нашем классе нет двух девочек, имеющих одинаковое число друзей среди мальчиков». Маша: «В нашем классе нет трёх мальчиков, имеющих одинаковое число друзей среди девочек». Докажите, что кто-то из них ошибся. (*А. Грибалко*)

109. Нерадивый Вася забыл закрыть клетку, и из живого уголка убежало несколько хомячков. На вопрос, сколько хомячков осталось, Вася ответил, что количество оставшихся хомячков равно числу процентов, на которое это количество уменьшилось в результате побега. Какое наименьшее количество хомячков могло находиться в живом уголке первоначально?

110. На доске написали число 10000. После этого с числом, написанным на доске, производят следующую операцию: если в записи числа есть хотя бы одна нечётная цифра, то из него вычитают 1, иначе из него вычитают 2. За какое количество операций на доске получится 0? (*К. Кноп*)

111. Петя отметил на окружности 20 красных и 20 синих точек. Вася проводит хорды так, чтобы концы каждой хорды были одного цвета, и чтобы эти хорды не пересекались (даже в вершинах). Какое наибольшее количество хорд Вася гарантированно сможет провести, как бы ни отметил точки Петя? (*Е. Бакаев*)

112. В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABC точка K – середина гипотенузы AB, точка L – середина катета AC. На отрезке KL отметили точку P, а на отрезке BK – точку Q так, что $CP = PQ$. Найдите угол CPQ. (*Е. Бакаев*)

113. Касательная, проведённая к описанной окружности треугольника ABC в точке A, пересекает серединный перпендикуляр к стороне AB в точке A'. А касательная, проведённая к той же окружности в точке C, пересекает серединный перпендикуляр к стороне CB в точке C'. Докажите, что прямая $A'C'$ касается описанной окружности треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

114. Лёша записал в вершинах квадрата четыре числа, сумма которых равна 100, затем записал на каждой стороне произведение чисел, стоящих в её концах, после чего вычислил сумму чисел, записанных на сторонах. Саша увеличил на 1 два числа в концах одной из сторон и точно так же подсчитал новую сумму чисел на сторонах. На сколько Сашина сумма больше Лёшиной? (*А. Шаповалов, А. Заславский*)

115. Выпуклый четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Среди их углов ровно три различных. Чему может быть равен наибольший из этих углов? (*Б. Френкин*)

116. Дано три уравнения: $x^2 + 2x + a = 0$, $x^2 + 3x + b = 0$, $x^2 + 4x + c = 0$. Известно, что у каждых двух из них есть общий корень. Докажите, что среди корней этих уравнений есть три различных числа, одно из которых является средним арифметическим двух других. (*В. Клепцын*)

117. Алиса и Базилио делят добытую кучу из 100 кошельков, в которых лежит соответственно 1, 2, …, 100 золотых. Ходят по очереди, начинает Алиса. За один ход можно вынуть из кучи любой кошелёк и либо взять его себе, либо отдать напарнику. Как только у кого-то наберётся 50 кошельков, другой забирает из кучи все остальные. Какое наибольшее количество золотых может обеспечить себе Алиса, как бы ни действовал Базилио? (*А. Шаповалов*)

118. По кругу написано $2n$ целых чисел. Разрешается либо выбрать два противоположных числа и умножить каждое на 2, либо выбрать n подряд стоящих чисел и увеличить каждое на 1. Всегда ли можно добиться, чтобы все числа стали равными, при **а**) $n = 2$; **б**) $n = 1007$? (*Н. Чернятьев*)

119. Один из углов треугольника равен 60°. Докажите, что центр описанной окружности этого треугольника равноудалён от биссектрис двух других его углов. (*А. Грибалко*)

120. Найдите все такие натуральные m и n, для которых число $3^m + 7^n$ является точным квадратом.

121. Можно ли на доске 100×100 расставить 100 не бьющих друг друга ферзей так, чтобы они разбивались на 25 групп по четыре ферзя, каждая из которых располагалась бы в квадрате 4×4? (*А. Грибалко*)

122. Пусть a и b – натуральные числа, q и r – частное и остаток от деления ab на $a + b$. Найдите все пары (a, b), для которых $q^2 + r = 2011$.

123. Вокруг стола с метровыми промежутками стоит p блюдец, где p – простое число. На каждом блюдце лежит по одному печенью. Карлсон проходит вокруг стола k метров, останавливается и берёт печенье с блюдца. Затем Малыш, стартовав из того же места, проходит вокруг стола m метров, останавливается и берёт там печенье с блюдца. Потом Карлсон от места своей остановки идёт k метров и берёт печенье с блюдца (если оно там ещё осталось) и так далее. Все переходы они делают в одном направлении. Кому из них достанется больше печенья и на сколько, если k и m – различные натуральные числа, меньшие p? (*М. Шаповалов*)

124. Точка O – центр описанной окружности треугольника ABC, H – его ортоцентр. На прямых AB и AC отмечены соответственно такие точки M и N (отличные от точки A), что $CM = CA$ и $BN = BA$. Прямые BC и MN пересекаются в точке P. Докажите, что прямые AP и OH перпендикулярны. (*А. Грибалко*)

125. Из нескольких палочек сложен многоугольник. Известно, что палочек не менее пяти и из любой тройки подряд идущих палочек можно сложить треугольник. Докажите, что найдётся по крайней мере ещё одна тройка палочек, из которых складывается треугольник. (*А. Шаповалов*)

126. На сторонах выпуклого четырёхугольника построены равносторонние треугольники во внутреннюю сторону. Оказалось, что треугольники, построенные на одной паре противоположных сторон, имеют общую вершину. Докажите, что треугольники, построенные на другой паре противоположных сторон, имеют общий центр. (*И. Шарыгин*)

Финал

127. В словах ДЕНЬ, НОЧЬ, СВЕТ, ТЕНЬ буквы заменили цифрами, причём одинаковые буквы – одинаковыми цифрами, а разные – разными. Получились числа 1834, 2014, 6014, 9506, только, может быть, записанные в другом порядке. А какое число получится при такой замене из слова ОТВЕТ? (*А. Шаповалов*)

128. На Чудо-дереве растут туфельки, сапожки, ботинки и валенки – всего 82 штуки. Туфелек в полтора раза больше, чем сапожек, а валенок в 2,5 раза меньше, чем ботинок. Федя хочет нарвать четыре туфельки и 13 валенок. Сможет ли он это сделать?

129. Можно ли отметить на плоскости семь точек так, чтобы среди треугольников с вершинами в этих точках более 20 были прямоугольными? (*Э. Акопян*)

130. В полночь ведьма заколдовала Мальчика-с-пальчика, чтобы он бродил по плоской равнине. За первый час он должен пройти по прямой 1 км, потом повернуть под прямым углом направо или налево, пройти за следующий час 2 км, опять повернуть направо или налево, пройти за час 3 км и так далее. Колдовство исчезнет, если Мальчик-с-пальчик окажется в точке старта через целое число часов.

а) Может ли Мальчик освободиться в тот же день ровно в 20:00?

б) В котором часу Мальчик мог освободиться, если это произошло меньше чем через сутки?

в) Через сколько часов Мальчик может освободиться? (*А. Шаповалов*)

131. В ряд стояли дети в следующем порядке: Миша, Даша, Гриша, Наташа, Саша, Маша, Лёша. Каждый отдал по ореху каждому из стоящих правее него. Количество орехов у девочек не изменилось. Определите, кем является Саша: мальчиком или девочкой. (*А. Шаповалов*)

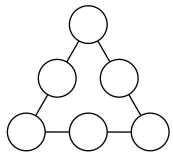
132. Петя и Вася играют на доске 2×50. За один ход игрок должен выставить на свободные клетки двух коней, которые бьют друг друга. Ходы делаются по очереди, начинает Петя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

133. **а**) Расставьте в клетки квадрата 3×3 девять различных натуральных чисел так, чтобы произведения чисел в четырёх квадратах 2×2 оказались одинаковыми.

б) Расставьте в клетки квадрата 3×3 девять различных натуральных чисел, не превышающих 100, так, чтобы произведение чисел в каждом из четырёх квадратов 2×2 было равно произведению чисел в четырёх угловых клетках. (*И. Раскина*)

134. У вожатого Миши записано, что в лагере 10 девочек и 30 мальчиков, а у вожатой Арины – общее число детей. Арина считает, что детей можно разбить как на пары, так и на тройки. Оказалось, что у кого-то из вожатых (возможно, у обоих) все записанные числа отличаются от верных на 1. Сколько детей в лагере? (*А. Банникова*)

135. Кощей назовёт Ивану шесть различных чисел. Докажите, что Иван сможет расставить их в кружочки (см. рисунок) так, чтобы суммы чисел на сторонах треугольника оказались различными. (*А. Шаповалов*)



136. В одной куче 20 камней, в другой – 14, а в третьей – 2014. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно взять либо один камень, либо два камня из одной кучи. Выигрывает тот, кто возьмёт последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Э. Акопян*)

137. На доске 7×7 центральный квадрат 3×3 заполнен ладьями. Какое наибольшее число слонов можно расставить на свободные клетки так, чтобы ни один из них не мог съесть другого, сделав менее трёх ходов? (*М. Артемьев*)

138. Положительные числа x, y, z таковы, что $x^3 + y^3 + z^3 = (x + y - z)^3 + (y + z - x)^3 + (z + x - y)^3$. Верно ли, что $x = y = z$?

139. К окружности с центром O проведена касательная в точке A. На касательной выбрана точка B, а на окружности – точка C так, что $AB = AC$ и точка O лежит на отрезке BC. Найдите углы треугольника ABC. (*Е. Бакаев*)

140. Можно ли все натуральные числа от 1 до 2014 разбить на две группы так, чтобы сумма чисел в одной группе равнялась произведению чисел в другой группе? (*А. Шаповалов*)

141. На столе в ряд стоит 100 стаканов дном вниз. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход нужно найти стакан, у которого оба соседа стоят дном вниз, и перевернуть обоих соседей. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

142. Назовём представление числа 100 в виде суммы нескольких натуральных слагаемых хорошим, если нельзя подчеркнуть одно или несколько слагаемых с суммой 4. Какое наибольшее количество слагаемых может быть в хорошей сумме? (*А. Шаповалов*)

143. Возьмём бумажный квадрат *ABCD*. Пусть *M* – середина стороны *AD*. Согнём квадрат так, чтобы сгиб проходил через точку *M*, а середина стороны *AB* попала на диагональ *BD*. Разогнём лист, отрезок сгиба обозначим *ME*. Теперь согнём квадрат так, чтобы сгиб снова проходил через точку *M*, а середина стороны *CD* попала на диагональ *AC*. Разогнём лист, отрезок сгиба обозначим *MF*. Докажите, что треугольник *MEF* равносторонний. (*С. Струнков*)

144. В королевстве кривых весов запрещены чашечные весы, показывающие равновесие при равенстве масс грузов на чашах. Однако для любого $a > 1$ разрешены неравноплечие весы, показывающие равновесие, если масса груза на левой чаше в a раз больше массы на правой. Имея всего одни весы, Толя за два взвешивания может из восьми монет, среди которых семь настоящих и одна фальшивая, которая легче настоящих, выявить фальшивую. Чему равно a у Толиных весов? (*А. Шаповалов*)

145. В однокруговом шахматном турнире участвует восемь игроков. В какой-то момент оказалось, что нет пяти шахматистов, которые попарно сыграли друг с другом. Какое наибольшее число партий могло быть сыграно к этому моменту?

146. На вписанной окружности равностороннего треугольника *ABC* выбрана точка *K* так, что середина отрезка *BK* также лежит на этой окружности. Найдите угол *AKC*.

147. В записи натурального числа ровно 2014 цифр, причём центральные четыре цифры – 2, 0, 1, 4 (именно в таком порядке). Может ли это число быть точным квадратом? (*А. Шаповалов*)

148. Различные числа *a, b, c* таковы, что $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$. Чему может равняться *abc*?

149. В шахматном турнире участвует **а**) 14 игроков; **б**) 2014 игроков. В каждом туре они случайным образом разбиваются на пары, но два шахматиста, игравшие друг с другом раньше, второй раз играть не могут. Турнир заканчивается, когда такое разбиение произвести невозможно. Найдите наименьшее возможное число туров. (*А. Блинков*)

150. Вневписанная окружность прямоугольного треугольника *ABC* касается продолжений катетов *CA* и *CB* в точках A_1 и B_1. Описанная окружность треугольника *ABC* пересекает прямую A_1B_1 в точках *P* и *Q*. Найдите угол *PCQ*. (*Д. Швецов*)

151. В каждую из n одинаковых пробирок налито не более половины пробирки раствора разной концентрации. Химик знает, где какая концентрация, и может перелить из одной пробирки в другую любое нужное ему количество раствора (лишь бы пробирка не переполнилась). За какое наименьшее число переливаний он гарантированно может добиться, чтобы раствор во всех пробирках стал одинаковой концентрации (при этом некоторые пробирки, возможно, опустеют)? (*А. Шаповалов*)

152. Точка *M* – середина стороны *BC* треугольника *ABC*. Точки *X* и *Y* – середины дуг *AB* и *AC* описанных окружностей треугольников *ABM* и *ACM*, не содержащих точку *M*. Докажите, что прямые *XY* и *AM* перпендикулярны. (*М. Урьев*)

153. На доске 100×100 стоит невидимая ладья. За один вопрос можно указать любой набор клеток и узнать, сколько из них побиты ладьёй. Сколько таких вопросов нужно задать, чтобы наверняка узнать положение ладьи? Считается, что ладья бьёт клетку, на которой стоит. (*А. Шаповалов*)

Источник: http://tursavin.ru