XXI турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2015 года

Личная олимпиада

1. Петя ходит на работу каждый третий день, а Вася – каждый пятый. В тот день, когда они оба не работают, Петя и Вася вдвоём идут на рыбалку. Известно, что 6, 7, 9 и 10 июня друзья были на рыбалке. Когда в июне они последний раз ходили на рыбалку? (*Е. Бакаев, Т. Казицына*)

2. Барон Мюнхгаузен поставил на шахматную доску трёх ферзей и утверждает, что теперь по соседству с каждой непобитой ими клеткой есть не менее двух побитых. Могут ли слова барона быть правдой? Клетки считаются соседними, если имеют общую сторону. (*А. Солынин*)

3. К столу, на котором лежало 20 яблок, подошла группа детей. Половина детей взяли по два яблока и ушли. Потом половина оставшихся взяли по два яблока и ушли. Затем опять половина оставшихся взяли по два яблока и ушли. Наконец все оставшиеся взяли по два яблока и ушли. Сколько яблок могло остаться на столе? (*Б. Френкин*)

4. Буратино удалось выучить только цифры от 0 до 5, поэтому Мальвина задала ему систему ребусов, в которых нет других цифр: ШОУ · А = ДОМА и МУ · УМ = ШОУ. Помогите Буратино расшифровать их. (*А. Блинков*)

5. Можно ли разрезать квадрат на шесть различных фигур одинакового периметра и одинаковой площади? (*А. Шаповалов, Д. Калинин*)

6. К левому берегу реки подошли три разбойника, а к правому одновременно с ними – четыре купца. Каждому надо на противоположный берег. У левого берега есть двухместная лодка. Купцы не хотят оказаться в меньшинстве на одном берегу с разбойниками. Грести могут только один из купцов и один из разбойников. Как им всем переправиться? (*А. Шаповалов*)

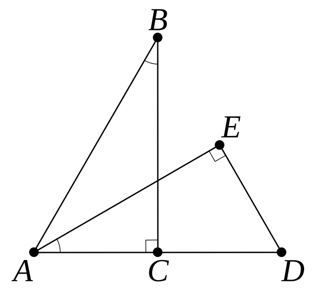
7. Летняя школа проходила 11 дней. Каждый день 10% её участников кормили комаров. Для любых двух последовательных дней больше 1% участников школы кормили комаров оба эти дня. Обязательно ли найдётся участник, ни разу не кормивший комаров? (*А. Ляховец, О. Орёл, А. Скопенков*)

8. Можно ли отметить на листе бумаги восемь точек и провести восемь прямых (каждую – ровно через две отмеченные точки) так, чтобы по обе стороны от каждой прямой было одинаковое количество точек?

9. Султан вызвал десять умнейших своих мудрецов и огласил правила нового испытания. Каждому мудрецу сообщат натуральное число, не большее 1000, причём одно из чисел будет больше остальных. Затем каждого мудреца по очереди будут спрашивать, не у него ли наибольшее число. Он может ответить либо «Не знаю», либо «У меня». После ответа «Не знаю» испытание продолжится, и вопрос зададут следующему мудрецу. Если десятый мудрец ответит «Не знаю», то вопрос опять зададут первому мудрецу и так далее. После ответа «У меня» испытание закончится. Если мудрец даст верный ответ, то всех мудрецов отпустят, а если неверный – всех казнят. Мудрецам запретили не только обмениваться какой-либо информацией во время испытания, но даже договариваться о чём-либо заранее. Королевский палач 100 раз обошёл всех мудрецов, и 100 раз каждый из них ответил «Не знаю». Наконец, палач в 101-й раз спросил первого мудреца, не у него ли наибольшее число. «У меня» – ответил мудрец, и этот ответ был верным. Какое число было у первого мудреца? (*С. Грибок*)

10. Петя записал в вершинах квадрата четыре числа, сумма которых равна 100, затем записал на каждой стороне произведение чисел, стоящих в её концах, после чего вычислил сумму чисел, записанных на сторонах. Вася увеличил на 1 каждое число, поставленное Петей в вершинах, и точно так же подсчитал новую сумму чисел на сторонах. На сколько Васина сумма больше Петиной? (*А. Шаповалов*)

11. Два равных прямоугольных треугольника *ABC* и *ADE* расположены, как показано на рисунке. Оказалось, что точка *E* равноудалена от *B* и *D*. Найдите отмеченный угол. (*А. Блинков*)



12. **а**) У барона Мюнхгаузена есть четырёхугольник, длина большей диагонали которого равна 10 см. Он разрезал его на четыре равнобедренных треугольника и утверждает, что у каждого треугольника самая длинная сторона также равна 10 см. Могут ли слова барона быть правдой?

б) Самая длинная диагональ пятиугольника равна 1. Его разрезали на пять равных треугольников. Могло ли оказаться, что у каждого треугольника самая длинная сторона также равна 1?

в) Барон Мюнхгаузен утверждает, что для любого указанного ему натурального числа $n > 1$ он сможет нарисовать многоугольник, который можно разрезать на n меньших равных выпуклых многоугольников того же диаметра. Могут ли слова барона быть правдой? Диаметром многоугольника называется наибольшее расстояние между его точками. (*А. Шаповалов*)

13. Может ли сумма цифр натурального числа *A* равняться *B*, а произведение цифр числа *B* равняться *A*? В десятичной записи каждого из чисел *A* и *B* больше одной цифры. (*Н. Чернятьев*)

14. Вышел Иван – крестьянский сын на бой со Змеем Горынычем. Срубил ему половину голов и ещё одну голову, а у Змея количество голов удвоилось. Срубил Иван Змею половину этих голов и ещё две, а у того количество голов утроилось. Опять срубил половину голов и ещё три, а у Змея аж вчетверо голов больше стало. Бились они так ещё какое-то время, и всё же одолел Иван супостата. Сколько же голов было у Змея Горыныча? (*А. Заславский*)

15. В треугольнике *ABC* угол *A* равен 30°, а угол *C* равен 105°. Найдите угол между медианой *BM* и стороной *AB*. (*Е. Бакаев*)

16. Каждый ученик класса вышел к доске и записал одно неравенство вида $x * a$, где x – переменная, a – какое-то число (у каждого ученика своё), * – один из знаков неравенства. Всегда ли учитель может указать такое значение *x*, что не менее половины записанных неравенств окажутся верными? (*А. Акопян*)

17. В треугольнике *ABC* высота *BH* проходит через середину медианы *AM*, точка *K* – середина отрезка *BM*. Докажите, что треугольник *AKC* равнобедренный. (*Ю. Блинков*)

18. Расставьте 16 ферзей на доске 9×9 так, чтобы каждый бил ровно трёх других. Ферзи бьют друг друга, если находятся на одной горизонтали, вертикали или диагонали и между ними нет других ферзей. (*А. Шаповалов*)

19. Найдите все пятизначные числа вида $\overline{abcde}$, которые делятся на число $\overline{abde}$. Различными буквами могут быть обозначены одинаковые цифры. (*Н. Наконечный*)

20. Двое юношей и девять девушек переправились на трёхместной лодке с левого берега реки на правый за 15 рейсов (считая рейсы туда и рейсы обратно). Грести умели все. Мог ли каждый юноша хотя бы раз совершить рейс с каждой девушкой (при этом в лодке могло быть и трое)? (*А. Шаповалов*)

21. В тридевятом государстве было 200 работающих предприятий. Шесть министров приватизировали часть предприятий. Когда наступили «смутные времена», первый министр продал второму 10% своих предприятий и ещё одно. Затем второй министр продал третьему 10% предприятий, имеющихся у него к этому моменту, и ещё два. После этого третий продал четвёртому 10% и ещё три и так далее до тех пор, пока шестой не продал первому 10% своих предприятий и ещё шесть. В результате у каждого министра оказалось столько же предприятий, сколько он приватизировал изначально. Сколько предприятий осталось у государства? (*А. Заславский*)

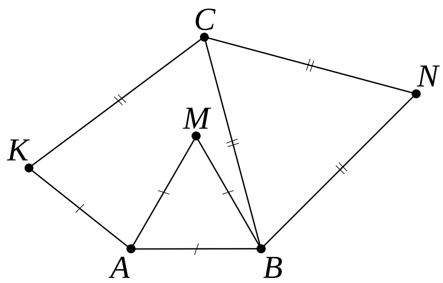
22. В прямоугольном треугольнике ABC угол A равен 30°. Вписанная в него окружность с центром I касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Серединный перпендикуляр к гипотенузе AB пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Докажите, что прямые AI и CK параллельны. (*Д. Швецов, Ю. Зайцева*)

23. Можно ли заполнить числами квадратную таблицу 7×7 так, чтобы сумма всех чисел в каждом квадрате 3×3 была положительной, а сумма всех чисел в каждом квадрате 5×5 – отрицательной? (*В. Журавлёв, П. Самовол*)

24. Даны различные положительные числа a и b. На первом шаге вычисляется их среднее арифметическое, а на каждом следующем шаге – среднее арифметическое a и числа, полученного на предыдущем шаге. Найдите отношение $\frac{b}{a}$, если число, полученное на n-м шаге ($n > 1$), совпало со средним гармоническим a и b. (*А. Блинков*)

25. В трапеции $ABCD$ угол A равен 60°. Точка E на боковой стороне AB такова, что треугольник CDE равносторонний. Докажите, что $AB = AD$. (*М. Васильев*)

26. Известно, что $a < b < c$ – натуральные числа, составляющие арифметическую прогрессию. Может ли выполняться равенство НОК(a, b) = НОК(a, c)? (*Б. Френкин*)



27. Треугольники AMB и BNC равносторонние, точка K выбрана так, что $AK = AB$ и $CK = CB$ (см. рисунок). Докажите, что точки K, M, N лежат на одной прямой. (*А. Акопян*)

28. В однокруговом футбольном турнире за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Команда А заняла первое место, набрав больше всех очков, а команда Б – последнее место, набрав меньше всех очков. Если бы за победу давали не 3 очка, а 2, то, наоборот, команда Б стала бы первой, а команда А – последней. Какое наименьшее количество команд могло играть в турнире? (*А. Заславский*)

Командная олимпиада

29. Можно ли на доску **а**) 4×5; **б**) 3×6 поставить ферзя, две ладьи и двух коней так, чтобы каждая фигура била ровно одну другую и была побита ровно одной другой? (*А. Шаповалов*)

30. Фрёкен Бок испекла пирожки с малиной, с клубникой, со сгущёнкой и с картошкой. Каждый третий пирожок среди всех – это пирожок с малиной, а каждый третий пирожок среди пирожков с ягодами – это пирожок с клубникой. Пирожков с картошкой было в 3 раза меньше, чем остальных пирожков. Каких пирожков было больше: с клубникой или со сгущёнкой? (*Д. Шноль*)

31. Сколько несократимых среди дробей $\frac{1}{1002}, \frac{2}{1003}, \ldots, \frac{1014}{2015}$?

32. В комнате находились Белоснежка и семь гномов. Каждый из них, в том числе и Белоснежка, является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда врёт. Первой из комнаты вышла Белоснежка и сказала: «Среди гномов рыцарей больше, чем лжецов». Затем из комнаты по очереди вышли шесть гномов, и каждый заявил: «Верно ровно одно из двух: либо все оставшиеся в комнате – лжецы, либо Белоснежка – лжец». Сколько рыцарей было в комнате первоначально?

(*Г. Жуков, И. Раскина*)

33. В классе учится 20 человек. У Лёши восемь друзей среди одноклассников, а у каждого из остальных ребят – не менее девяти. Если кто-то в этом классе узнаёт новость, он сообщает её всем своим друзьям. Лёша узнал новость. Докажите, что через некоторое время её будет знать весь класс. (*А. Шаповалов*)

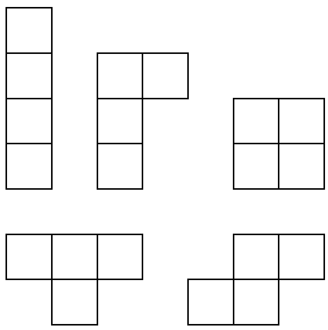
34. Оля написала в ряд несколько цифр. Даша переписала Олины цифры, но каждую написала подряд дважды. Каждая из девочек поставила между некоторыми цифрами знаки арифметических действий так, что у обеих получился результат 2015. Могло ли оказаться, что ни одна из девочек не ошиблась, если известно, что знаков они поставили поровну? (*А. Заславский*)

35. В лотерее 39 шаров, пронумерованных числами от 1 до 39. Играющий заполняет карточку, где указывает шесть номеров. В розыгрыше лотереи номера шести шаров объявляются неудачными. Та карточка, на которой не указано ни одного неудачного номера, считается выигравшей. Какое наименьшее число карточек можно заполнить так, чтобы среди них гарантированно нашлась выигравшая? (*С. Токарев*)

36. **а**) Гриша сказал, что составил прямоугольник из пяти видов фигурок-тетраминошек (см. рисунок), использовав нечётное число фигурок каждого вида (фигурки он мог поворачивать и переворачивать). Докажите, что Гриша ошибся.

б) Гриша сказал, что составил прямоугольник из пяти видов фигурок-тетраминошек, причём каждый из видов либо вообще не использовался, либо был использован нечётное число раз (фигурки он мог поворачивать и переворачивать). Докажите, что Гриша использовал не более двух видов фигурок.

в) В условиях пункта б) сколько видов фигурок мог использовать Гриша? (*Е. Бакаев*)



37. **а**) На плоскости проведено несколько прямых. Всегда ли можно отметить две точки так, чтобы они оказались по разные стороны от каждой прямой?

б) На плоскости дано конечное число полуплоскостей. Всегда ли можно отметить две точки так, чтобы в каждой полуплоскости оказалась ровно одна отмеченная точка?

в) Несколько прямых, никакие две из которых не параллельны друг другу, делят плоскость на части. В одной из частей (неограниченной) отмечена точка A. Докажите, что на плоскости найдётся такая точка B, что A и B лежат в разных полуплоскостях относительно каждой из прямых. (*А. Заславский*)

38. Учитель записал на трёх листах бумаги одинаковые примеры на сложение натуральных чисел. В каждом слагаемом он использовал только цифры 1, 2 и 3, и при этом каждое слагаемое содержало по крайней мере две различные цифры. Учитель раздал листки трём ученицам. Ева вычеркнула на своём листке все единицы, Даша – все двойки, Таня – все тройки. То, что получилось, каждая девочка без ошибок вычислила. Могли ли все три результата оказаться одинаковыми? (*А. Шаповалов*)

39. Точки A, B, C, D расположены на плоскости так, что $BC + BD = AC = AD$ и $\angle ACB = 60°$. Чему может быть равен угол ADB? (*Е. Бакаев*)

40. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2015}$ такова, что $a_1 = a_{2015}$ и $a_n + a_{n+1} = a_{n+1}^2 + 1$ при всех целых n от 1 до 2014. Найдите a_{1000}. (*А. Блинков*)

41. В таблице 10×10 Андрей перечеркнул поперёк общую сторону каждой пары соседних клеток маленькой стрелочкой. Все вертикальные стрелочки он направил вниз, а горизонтальные – как попало. Всегда ли удастся записать в клетках таблицы различные натуральные числа от 1 до 100 так, чтобы для каждых двух чисел в соседних клетках стрелка указывала направление от большего числа к меньшему? (*А. Солынин*)

42. Несколько различных натуральных чисел, произведение которых – точный квадрат, выписаны в порядке возрастания. Первое число равно 1001. Найдите наименьшее возможное при этих условиях последнее число в списке.

43. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Докажите, что окружности, проходящие через середины сторон треугольников ABC и ADC, касаются друг друга тогда и только тогда, когда $\angle DAB = 90°$. (*А. Иванов*)

44. Докажите, что при $a, b, c \geq 1$ выполняется неравенство $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \leq abc + \frac{1}{abc} + 1$. (*Д. Аубекеров*)

45. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ нашлась такая точка K, что $\angle BAK = \angle DAC$ и $KA = KD$. Найдите отношение $BD : AB$. (*А. Заславский*)

Первый тур

46. В колоде 52 карты (четыре масти, 13 достоинств). Про каждые две карты одной масти или одного достоинства известно, сколько карт лежит между ними. Достаточно ли этой информации, чтобы узнать две крайние карты колоды? (*А. Шаповалов*)

47. Калькулятор умеет прибавлять к числу его последнюю цифру, а больше ничего не умеет. Сколько существует **а**) натуральных чисел; **б**) двузначных чисел, из которых за несколько таких операций можно получить число 2016? (*Л. Смирнова*)

48. Каждый из трёх рубильников включает три из семи лампочек. Лампочка загорается, если включён хотя бы один включающий её рубильник. Если включить первый и второй, то загорятся лампочки с номерами 1, 2, 4 и 5. Если включить второй и третий, то загорятся все лампочки, кроме лампочки с номером 2. А сколько лампочек загорится, если включить первый и третий рубильники? (*Е. Бакаев, Д. Шноль*)

49. На шахматной доске стоит несколько ладей. Каждая собирается сделать ход на некоторую свободную клетку, при этом нельзя перепрыгивать через другие ладьи. Все ладьи собираются пойти на разные клетки. Может ли случиться, что в каком бы порядке ладьи ни ходили, все намеченные ходы сделать не удастся? (*А. Шаповалов*)

50. Гномы и эльфы решили мирным путём выяснить, кто круче. Они расставили вокруг стола $n > 13$ стульев и, начав с гномов, стали по очереди садиться на них. За один ход можно занять либо один стул, либо сразу два, между которыми стоит ровно шесть других стульев. Кто займёт последний стул, тот и круче. Кто окажется круче, как бы ни действовали соперники? (*Э. Акопян*)

51. Принцесса отправилась из дворца на прогулку к роднику. В дороге она захотела пить и отправила двух фрейлин за водой, а сама продолжила путь. Первая фрейлина побежала к роднику, а вторая – во дворец. Фрейлины вернулись к принцессе одновременно, когда та прошла ровно три четверти пути от дворца до родника. Во сколько раз фрейлины бегают быстрее, чем ходит принцесса, если известно, что бегают они с одинаковой скоростью?

52. Десятизначное число, написанное на бумаге, мысленно разрезали на две части и нашли НОД двух получившихся чисел. Так сделали для всех девяти способов его разрезать. Могли ли эти НОД оказаться различными числами от 1 до 9? (*Е. Бакаев*)

53. Равносторонний треугольник со стороной n разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольнички со стороной 1. Группу треугольничков, лежащих между двумя соседними параллельными прямыми, будем называть полосой; каждый из трёх угловых треугольничков также будем считать полосой (всего получилось $3n$ полос).

а) Пусть $n = 30$. Егор хочет покрасить 45 треугольничков в синий цвет так, чтобы в каждой полосе был хотя бы один синий треугольничек. Удастся ли ему это сделать?

б) Пусть $n = 10$. Какое наименьшее количество треугольничков надо покрасить в синий цвет так, чтобы в каждой полосе был хотя бы один синий треугольничек?

в) Та же задача для $n = 2015$.

г) Та же задача для произвольного $n > 1$. (*Е. Бакаев*)

54. У каждой из семи поварих есть ровно один брат. Каждая замужем за братом другой поварихи. За год каждая повариха похудела на 3 кг больше, чем поправился её муж, и при этом на вдвое большее число килограммов, чем поправился её брат. На какое наибольшее число килограммов могла похудеть повариха Матрёна? (*О. Нечаева*)

55. На медиане BM треугольника ABC отметили точки K и L так, что $AK = BC$ и $\angle BLC = 90°$. Найдите отношение $BK : LM$. (*С. Иванов*)

56. Сумма положительных чисел больше 90, при этом каждое слагаемое не больше 10. Докажите, что можно выбрать несколько чисел, сумма которых больше 81, но не больше 90. (*П. Семёнов*)

57. На плоскости провели шесть прямых и отметили несколько точек так, что на каждой прямой оказалось ровно по три отмеченные точки. Какое наименьшее число точек могло быть отмечено?

58. Шахматную доску разбили на двухклеточные доминошки. Рядом с каждой горизонталью и каждой вертикалью доски написали, сколько доминошек покрывает соответствующую линию. Докажите, что если рассматривать все числа, которые могут быть написаны (то есть 4, 5, 6, 7 и 8), то какое-то из них написано не более двух раз. (*А. Грибалко*)

59. В высшей лиге первенства России по футболу участвует 16 команд, которые играют в два круга. За победу начисляется 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. В каждом туре команды разбиваются на пары и играют восемь матчей. По итогам турнира две команды, набравшие меньше всех очков, выбывают в первую лигу. За какое наибольшее количество туров до конца турнира может оказаться, что эти две команды уже определились?(*А. Блинков*)

60. В окружность радиуса 1 вписан правильный десятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}$. Найдите расстояние между прямыми A_1A_5 и A_2A_4. (*А. Заславский*)

61. Две окружности пересекаются в точках A и B. К окружностям проведена общая касательная, которая касается их в точках P и Q. Точка H – ортоцентр треугольника PAQ. Докажите, что угол ABH прямой. (*Е. Бакаев*)

62. Есть куча из N камней. За один ход одна из имеющихся куч делится на две и записывается число $ab(a + b)$, где a и b – количества камней в двух новых кучах. Чему может быть равна сумма записанных чисел, когда останутся только кучи из одного камня? (*Е. Бакаев*)

63. Решите систему уравнений $\begin{cases} a = \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d}, \\ b = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{a}, \\ c = \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}, \\ d = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}. \end{cases}$

64. Существует ли квадратный трёхчлен $f(x)$, для которого при каждом натуральном m найдётся такое натуральное n, что $f\left(\frac{m-2015}{m}\right)=\frac{n-2015}{n}$? (*А. Шаповалов*)

65. Точки P и Q – середины сторон BC и CD правильного шестиугольника $ABCDEF$ соответственно, отрезки AQ и FP пересекаются в точке T. Найдите отношение $AT:TQ$. (*М. Волчкевич*)

Второй тур

66. У Васи есть комплект карточек с цифрами от 0 до 9, по одной карточке с каждой цифрой. Используя их (возможно, не все), он составил N чисел, сумма которых равна 2015. Найдите все возможные значения N. (*Э. Акопян, Д. Калинин*)

67. Можно ли составить прямоугольник из 90 квадратов со стороной 90 и 45 квадратов со стороной 45? (*К. Кноп*)

68. У Кощея хранится 100 одинаковых бутылок с водой. Он помнит, что в половине бутылок живая вода, а во второй половине – мёртвая, но не помнит, какая где. Если полить цветок хотя бы каплей Кощеевой воды, то на следующий день станет ясно, что это была за вода. Кощею завтра потребуется десять бутылок живой воды. Какое наименьшее количество цветков он должен полить для того, чтобы ничего не перепутать? Поливать один цветок водой из нескольких бутылок нельзя. (*Е. Горская*)

69. Картина вместе с корзиной на 5 кг тяжелее картонки. Корзина с картонкой на 2 кг тяжелее картины. Что тяжелее и на сколько: картина или картонка? (*И. Раскина*)

70. Сначала на доске по одному разу написаны натуральные числа **а**) от 1 до 13; **б**) от 1 до 17. Играют двое, ходят по очереди. За один ход можно стереть любые два числа и вместо них написать их произведение. Проигрывает тот, после чьего хода одно из чисел на доске будет делиться на 100. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Е. Бакаев*)

71. **а**) Можно ли представить число $\underbrace{2015\ldots2015}_{2015}$ как разность двух палиндромов?

б) Любое ли натуральное число можно представить в виде разности двух палиндромов? (*А. Шаповалов*)

72. **а**) На доске записано в строку несколько букв a и b. Саша подсчитал, что 16 раз буква b идёт после буквы a, восемь раз буква a идёт после букв ab и семь раз буква b идёт после букв ab. Какими могут быть две последние буквы на доске?

б) На доске записано в строку несколько букв a и b. Саша подсчитал, что 16 раз буква b идёт после буквы a, 15 раз буква a идёт после буквы b и восемь раз буква a идёт после букв ab. Сколько раз после букв bb идёт буква a? (*Л. Смирнова*)

73. К переправе через бурную реку подошли шесть человек: А, Б, В, Г, Д, Е. Есть трёхместная лодка, грести должны двое. Каждый согласен переправляться, если в лодке у него будет хотя бы один знакомый. Как им всем переправиться на другой берег, если знакомы А и Б, Б и В, В и Г, Г и Д, Г и Е, при этом Г не может грести? (*А. Шаповалов*)

74. **а**) В стране гномов девять городов, некоторые из них гномы соединили дорогами. Всё было хорошо, но на города стал нападать дракон. Дракон разрушает все дороги, идущие из выбранного города, но затем трудолюбивые гномы строят дороги из этого города во все города, с которыми он не был соединён до нападения дракона. Докажите, что дракон сможет оставить в стране не более 16 дорог.

б) В условиях пункта а) дракон хочет, чтобы в итоге осталось не более k дорог. При каком наименьшем k он сможет добиться этого, независимо от первоначальной системы дорог?

в) Та же задача для страны из N городов. (*А. Солынин*)

75. В ряд выложено 45 белых и 67 чёрных шаров. На каждом из них написано, сколько шаров противоположного цвета находится левее него. Оказалось, что сумма чисел, написанных на белых шарах, равна 1000. Чему равна сумма чисел, написанных на чёрных шарах? (*А. Грибалко*)

76. Дан клетчатый квадрат **а**) 5×5; **б**) 8×8. Разрешается выбрать любой квадрат 3×3 со сторонами, идущими по границам клеток, или любую строку, или любой столбец и перекрасить каждую клетку этой области в противоположный цвет. С помощью таких операций из полностью белого квадрата получили квадрат, в котором ровно одна чёрная клетка. Где могла оказаться эта клетка? (*Е. Бакаев*)

77. Пересечение двух четырёхугольников состоит из трёх не соприкасающихся друг с другом частей. Могут ли эти части быть равными треугольниками? (*А. Шаповалов*)

78. Дан треугольник ABC. На луче AB отметили такую точку K, что $AK + KC = 2AB$. На луче CB отметили такую точку L, что $CL + LA = 2CB$. Докажите, что биссектрисы углов AKC и CLA параллельны. (*Е. Бакаев*)

79. Решите в целых числах уравнение $x^3 + x = x^2 + y^2$.

80. Биссектрисы углов A и B треугольника ABC пересекают окружность, построенную на AB как на диаметре, в точках X и Y. Докажите, что прямая XY перпендикулярна биссектрисе угла C. (*М. Волчкевич*)

81. Петя задумал три числа $x < y < z$ и написал на доске их попарные суммы. Оказалось, что эти суммы равны попарным произведениям тех же чисел x, y, z (возможно, взятых в другом порядке). Определите знаки чисел x, y, z. (*Б. Френкин*)

82. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Точки K, L, M, N – середины отрезков AB_1, AC_1, BA_1, BC_1 соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых KL и MN равноудалена от точек A и B. (*А. Гаркавый*)

83. Докажите, что для любого натурального $n \geq 30$ на отрезке $[2n, 3n]$ найдутся натуральные числа x, y, z, для которых $x^2 + y^2 - z^2 = n^2$. (*А. Грибалко*)

84. На плоскости несколько равносторонних треугольников с параллельными сторонами раскрашены в четыре цвета. Известно, что каждые два треугольника разного цвета имеют общую точку. Докажите, что каждые два треугольника одного из цветов имеют общую точку. (*А. Шаповалов*)

85. Найдите все такие простые p, что число $5^p + 4p^4$ является точным квадратом.

86. В вершинах квадрата со стороной 1 м были вбиты колышки. Один из колышков переставили, но не более чем на 20 см от первоначального положения. У Пети есть верёвка, с помощью которой он может сравнить любые два из шести попарных расстояний между колышками. Каких-либо других действий (например, завязывать узелки, складывать пополам) с верёвкой делать нельзя. Всегда ли Петя сможет определить, какой из колышков был переставлен? (*А. Марачёв*)

Третий тур

87. На десяти шариках написаны различные цифры. Можно ли сложить из них треугольник так, чтобы нижнее (четырёхзначное) число делилось на все три верхних, какую бы из трёх сторон треугольника ни считать нижней? (*А. Банникова*)

88. На отрезке AB длины 24 см отметили три точки C, D, E так, что каждая из отмеченных точек является серединой какого-либо из десяти получившихся отрезков. Чему может быть равна длина отрезка AC? (*Д. Шноль*)

89. Каждый из трёх школьников прочитал ровно половину из данного им списка книг. При этом первый утверждает: «Четверть книг из списка никем из нас не прочитана», второй: «Самую толстую книгу прочитал только я», третий: «Никакую книгу, даже самую тонкую, не прочитали все трое». Может ли такое быть или кто-то из школьников ошибается?

90. «Хоп!» – это игра на внимательность. Игроки по кругу называют натуральные числа в порядке возрастания. Если число кратно 3 или содержит в записи цифру 3, то вместо него надо сказать «Хоп!». Если не ошибаться, получится ряд: 1, 2, Хоп!, 4, 5, Хоп!, 7, 8, Хоп!, 10, 11, Хоп!, Хоп!, 14 и так далее. Кто по ошибке называет запрещённое число, выходит из круга, а игра продолжается со следующего числа. Побеждает последний оставшийся игрок. Пять ребят играли в «Хоп!». Известно, что числа 1 и 23 назвал Петя, 2 и 20 – Вася, а 5 и 15 – Таня, при этом никто не говорил «Хоп!», когда этого не требовалось. Сколько раз победитель сказал «Хоп!»? (*И. Раскина*)

91. По доске 8×8 ползают белая и чёрная улитки. Каждую секунду одна из улиток переползает на соседнюю по стороне клетку и красит её в свой цвет. Разрешается бывать на клетке более одного раза, но нельзя находиться вдвоём на одной клетке одновременно. Изначально ни одна клетка доски не покрашена, а в конце они покрашены все.

а) Может ли на доске получиться раскраска в полоску?

б) Сколько различных раскрасок может получиться таким образом? (*А. Банникова*)

92. Решите ребус КВАНТ + ВАНТ + АНТ + НТ + Т = ТУРНИР. (*Э. Акопян*)

93. Клетчатый прямоугольник **а**) из 72 клеток; **б**) из 1000 клеток разбит по линиям сетки на прямоугольники одинаковой площади. Какое наибольшее число не равных прямоугольников может найтись среди частей? (*А. Шаповалов*)

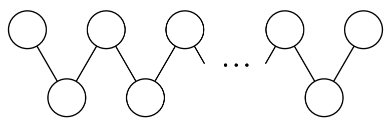
94. Имеется набор из 100 гирь массой 1 г, 2 г, …, 100 г. Вера и Оля по очереди кладут на чаши весов гири, начинает Вера. Цель Оли – сделать так, чтобы весы уравновесились в какой-то момент, цель Веры – ей помешать. Всегда ли Вера сможет достичь своей цели?

95. Гарри подарил Гермионе 15 различных по массе конфет: средняя по массе – со вкусом йода, а остальные – со вкусом мёда. Сможет ли Гермиона за восемь взвешиваний на чашечных весах без гирь найти хотя бы одну конфету со вкусом мёда?

96. Петя и Вася по очереди выкладывают на доску 100×100 не перекрывающиеся доминошки, начинает Петя. Каждая доминошка покрывает две соседние по стороне клетки. Доминошки необходимо выкладывать так, чтобы под каждой из них в тех же вертикалях не было непокрытых клеток. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*Е. Бакаев*)

97. В круг встало 100 детей. На некоторых из них уселись комары. Каждую минуту с одного из детей слетают четыре комара и садятся по одному на двух его соседей справа и двух слева. Может ли через некоторое время на Кирилле оказаться на два комара меньше, на его соседе Юре – на два комара больше, а на остальных детях остаться столько же комаров, сколько было в самом начале?

98. Можно ли расставить различные натуральные числа от 1 до 101 в кружки на рисунке так, чтобы каждое число в нижнем ряду было равно модулю разности чисел, стоящих в верхнем ряду и соединённых с ним? Всего на рисунке 101 кружок.



99. Доску 20×20 покрыли полностью без наложений двухклеточными доминошками. Каждую доминошку необходимо повернуть вокруг центра одной из клеток, которую она покрывает, на 90° (в любом направлении) или на 180°. Всегда ли можно сделать это так, чтобы доска снова оказалась покрыта полностью? (*А. Шаповалов*)

100. Найдите все тройки чисел (x, y, z), для которых $\frac{4}{x} = \frac{5}{y} + \frac{6}{z}$ и при этом x – однозначное, y – двузначное, а z – трёхзначное натуральные числа. (*А. Шаповалов*)

101. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. На стороне BC отмечена точка E, а на продолжении стороны CA за точку A – точка F. Оказалось, что $BD = DC$, $BE = DE$, а прямые EF и BD перпендикулярны. Докажите, что BA – биссектриса угла DBF.

102. **а**) Вдоль дороги стоят телеграфные столбы, на которых написаны номера 1, 2, 3 и так далее. Лёша задумал число 0 и пошёл по дороге. Проходя мимо столба, Лёша делит его номер на максимальную степень тройки, на которую он делится. Если полученное частное даёт остаток 1 при делении на 3, Лёша прибавляет к задуманному числу 1, а в противном случае вычитает из него 1. Какое число будет в голове у Лёши, когда он пройдёт мимо 2015-го столба?

б) Последовательность $\{a_n\}$ строится следующим образом: $a_0 = 0$, $a_n = a_{n-1} + 1$, если частное от деления n на максимальную степень тройки, входящую в его разложение, сравнимо с 1 по модулю 3, и $a_n = a_{n-1} - 1$ в противном случае. Найдите a_{2015}.

(*А. Заславский*)

103. В треугольнике ABC угол A равен 30°, а угол B равен 50°. На стороне AC отметили такую точку P, что $\angle ABP = 10°$. Докажите, что $AC = BP$. (*А. Хачатурян*)

104. Натуральные числа от 1 до n покрасили в два цвета. Числа 1 и m синие, k и n красные, $k < m$. Докажите, что найдутся синяя и красная пары, разности в которых одинаковы и не меньше, чем минимальное из чисел $m - 1$ и $n - k$. (*А. Шаповалов*)

105. По кругу выписаны плюсы и минусы, всего 33 знака. За один ход между каждыми двумя соседними знаками ставится плюс, если они одинаковые, и минус, если разные, после чего старые знаки стираются. Докажите, что позиция после первого хода будет такой же, как после 32 ходов. Позиции считаются одинаковыми, если одну из них можно повернуть так, что получится другая. (*Е. Бакаев*)

106. Квадратный трёхчлен $x^2 + bx + c$ имеет корни x_1 и x_2, причём $2 < x_1 \le x_2 < 3$. Докажите, что $5b + 2c < -12$.

107. На сторонах AD и CD ромба $ABCD$ выбраны точки P и Q соответственно. Вписанная окружность треугольника ABP касается сторон AP и BP в точках P_1 и P_2. Вписанная окружность треугольника CBQ касается сторон CQ и BQ в точках Q_1 и Q_2. Докажите, что прямые P_1P_2, Q_1Q_2 и BD пересекаются в одной точке. (*Д. Швецов*)

108. На высоте, проведённой из вершины B треугольника ABC, лежит точка P. Из точки P на прямые AB и CB опущены перпендикуляры PA_1 и PC_1, продолжения которых пересекают прямую AC в точках A_2 и C_2 соответственно. Докажите, что точки A_1, C_1, A_2, C_2 лежат на одной окружности. (*Д. Швецов*)

109. На стороне AB параллелограмма $ABCD$ отмечена точка K так, что $\angle KCB = \angle ACD$. Через точку K провели прямую, параллельную BC, которая пересекла CD в точке L. Докажите, что $\angle LBC = \angle DBA$. (*А. Блинков*)

110. В середине XX века Всемирные шахматные олимпиады проводились по следующей схеме. Все команды стран распределялись поровну на несколько подгрупп с чётным количеством команд, и в каждой подгруппе проходил однокруговой турнир. Затем команды, занявшие первые два места в каждой подгруппе, образовывали первую финальную группу, следующие две – вторую и так далее. В каждой финальной группе также проходил однокруговой турнир, причём команды, встречавшиеся на первом этапе, больше не играли друг с другом. Какое наибольшее количество команд могло участвовать в олимпиаде, если известно, что каждая команда провела $4n + 1$ матч? (*А. Блинков*)

111. Известно, что $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{100} \le 2^{50}$. Найдите наименьшее значение выражения $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_3}{a_4} + \ldots + \frac{a_{99}}{a_{100}}$.

Финал

112. Фома и Ерёма украли **а**) 60 алмазов; **б**) 444 алмаза. Ерёма предложил, что он разделит их на пять непустых кучек, а Фома выберет из них любые три. Если общее количество алмазов, взятых Фомой, будет кратно числу оставшихся алмазов, то вся добыча достанется Ерёме, а если не будет, то Фоме. Кому достанутся алмазы, если Фома согласится?

113. **а**) Перед Фомой и Ерёмой лежит на столе 100 яблок известных масс. Сначала Фома берёт со стола указанное Ерёмой яблоко и кладёт в корзину себе или Ерёме. Каждое следующее яблоко выбирает и кладёт в одну из корзин по своему выбору тот, кому досталось предыдущее. Как только в одной корзине окажется 50 яблок, остальные кладутся в другую корзину. Докажите, что при такой делёжке Фома сможет получить яблок по массе не меньше Ерёмы.

б) Перед Фомой и Ерёмой лежит на столе в ряд $2n$ яблок известных масс. Сначала Фома берёт самое левое яблоко и кладёт в корзину себе или Ерёме. Каждое следующее яблоко берёт слева и кладёт в одну из корзин по своему выбору тот, кому досталось предыдущее. Как только в одной корзине окажется n яблок, остальные кладутся в другую корзину. Докажите, что при такой делёжке Фома сможет получить яблок по массе не меньше Ерёмы.

в) Два старателя делят золотой песок. Сначала Ерёма делит его на 50 кучек и раскладывает их в ряд. Затем Фома берёт самую левую кучку и пересыпает в мешочек себе или Ерёме. Каждую следующую кучку берёт слева и пересыпает в один из мешочков тот, кому досталась предыдущая. Как только один получит 25 кучек, остальные отдаются другому. Сможет ли Ерёма получить больше половины золота, независимо от действий Фомы? (*А. Шаповалов*)

114. Пяти мудрецам принесли шесть колпаков: два красных, два жёлтых и два зелёных. Мудрецов построили в колонну и надели каждому по колпаку, а шестой колпак спрятали. Каждый мудрец видит колпаки всех стоящих перед ним, но не видит ни своего колпака, ни колпаков стоящих сзади. Затем по очереди, начиная со стоящего позади всех, стали спрашивать каждого, какого цвета на нём колпак. Если мудрец наверняка может определить цвет своего колпака, он называет его, а если нет, то отвечает «Не знаю».

а) Сколько мудрецов сможет определить цвет своего колпака, если двум первым надели красные колпаки, третьему и четвёртому – жёлтые, пятому – зелёный, а второй зелёный спрятали?

б) Мудрец Фома, стоявший позади Ерёмы, верно определил цвет своего колпака. Можно ли утверждать, что теперь и Ерёма определит цвет своего колпака?

115. Пони и ослик бегали с постоянными скоростями по кругу длиной 100 м. Пони каждые две минуты обгонял ослика. Когда ослик вдвое увеличил скорость, он сам стал каждые две минуты обгонять пони. С какими скоростями бегали пони и ослик изначально? (*С. Берлов*)

116. Существует ли натуральное число, у которого все цифры различны и каждая равна остатку от деления этого числа на сумму остальных цифр? (*А. Шаповалов*)

117. Можно ли на плоскости нарисовать шесть отрезков так, чтобы каждый пересекал (по внутренним точкам) ровно четыре других отрезка?

118. В однокруговом теннисном турнире приняли участие восемь девушек. За победу начислялось 1 очко, за поражение – 0, ничьих в теннисе не бывает. Оксана заняла второе место по набранным очкам, и такое количество очков не набрала больше ни одна другая участница. Сколько матчей могла проиграть Алеся, которая победила в этом турнире? (*Р. Богдан*)

119. На каждой клетке шахматной доски стоит по гному – рыцарю или лжецу. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда врут. Соседями считаются гномы в клетках с общей стороной.

а) Какое наибольшее число гномов могли бы сказать фразу «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей»?

б) Каждый гном сказал: «Среди моих соседей лжецов больше, чем рыцарей». Каково наибольшее возможное число рыцарей на доске? (*А. Шаповалов*)

120. **а**) У каждого из пяти детей есть по четыре конфеты. Каждую минуту один из них кладёт на стол столько рублей, у скольких детей конфет не меньше, чем у него, а затем съедает одну свою конфету. Сколько денег может оказаться на столе, когда все конфеты будут съедены?

б) Та же задача для 16 детей, у каждого из которых есть по восемь конфет. (*Е. Бакаев*)

121. Каждые два натуральных числа от 1 до 100 соединены стрелкой, ведущей от меньшего числа к большему. Как раскрасить эти стрелки в красный и синий цвета так, чтобы любой одноцветный путь проходил не более чем по девяти стрелкам?

122. Дима сложил из жёлтых и синих единичных кубиков куб $4 \times 4 \times 4$. Кубики каждого цвета образуют равные многогранники. Какова наибольшая возможная площадь поверхности одного такого многогранника? (*Д. Калинин*)

123. **а**) На шахматную доску поставили шесть коней. Докажите, что можно найти две не побитые конями клетки с общей стороной (конь не бьёт клетку, на которой стоит). (*А. Солынин*)

б) Какое наименьшее число коней можно поставить на шахматную доску так, чтобы для каждых двух клеток с общей стороной хотя бы одна из них была побита? (*А. Солынин, А. Грибалко*)

124. На кружке учительница дала детям задание придумать два таких треугольника, чтобы углы в них измерялись целым числом градусов, а в записи всех шести углов каждая цифра использовалась не более одного раза. Известно, что все дети справились с заданием, при этом у всех получились разные наборы углов. Какое наибольшее количество детей могло присутствовать на кружке? (*А. Грибалко*)

125. Придумайте три фигуры, из которых можно сложить как круг, так и квадрат. Фигуры могут перекрываться, но и круг, и квадрат должны быть без дыр. (*Т. Казицына*)

126. Дан квадрат $ABCD$. Точка O выбрана так, что $\angle AOC = 45°$. Перпендикуляр, восстановленный к AO в точке A, пересекает прямую OC в точке A_1. Перпендикуляр, восстановленный к CO в точке C, пересекает прямую OA в точке C_1. Докажите, что на прямой A_1C_1 лежит одна из вершин квадрата. (*Д. Мухин*)

127. На доске написано несколько натуральных чисел. Каждую минуту Егор выбирает какое-нибудь число и записывает на листок бумаги сумму всех остальных чисел, после чего выбранное число уменьшает на 1. Когда все числа на доске станут нулями, Егор сложит все числа на листке. Докажите, что сумма, которая у него получится, не зависит от порядка, в котором он будет выбирать числа. (*Е. Бакаев*)

128. Найдите все тройки простых чисел (p, q, r), для которых найдутся такие целые m и n, что $p + q = r^m$ и $p - q = r^n$.

129. Перед Фомой и Ерёмой лежит на столе **а**) 50 золотых монет массой 1 г, 2 г, …, 50 г; **б**) 150 золотых монет массой 1 г, 2 г, …, 150 г. Сначала Ерёма выкладывает их в ряд. Затем Фома берёт самую левую монету и кладёт в кошелёк себе или Ерёме. Каждую следующую монету берёт слева и кладёт в один из кошельков тот, кому досталась предыдущая. Как только в одном кошельке окажется половина монет, остальные кладутся в другой кошелёк. Какую наибольшую массу золота может гарантировать себе Ерёма, как бы ни действовал Фома? (*А. Шаповалов*)

130. От однокругового футбольного турнира, где результативно участвовало (то есть забило или пропустило по крайней мере один мяч) более трёх команд, осталась только таблица с общим количеством забитых и пропущенных мячей для каждой команды. Математик смог по ней однозначно восстановить счёт каждого матча. Докажите, что какая-то команда забила столько мячей, сколько пропустили все остальные вместе.

(*А. Шаповалов*)

131. Одна из сторон треугольника равна a. Разрежьте его на три части и сложите из них треугольник, одна из сторон которого равна $2a$. (*Е. Бакаев*)

132. Существует ли такое a, при котором уравнение $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=a$ имеет ровно 2016 целочисленных решений?

133. Существует ли бесконечная последовательность a_0, a_1, a_2, … целых неотрицательных чисел, в которой каждое целое неотрицательное число встречается ровно один раз, а последовательность $b_n=a_n+n$ состоит из всех квадратов натуральных чисел, взятых по одному разу?

134. В четырёхугольнике $ABCD$ сторона AB равна диагонали AC, $\angle CBD=30°$, $\angle CDB=50°$, $\angle ADB=65°$. Найдите угол ABD. (*М. Волчкевич*)

135. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. В треугольниках ABD и ACD проведены биссектрисы BK и CL соответственно. Описанные окружности треугольников ABK и DCL пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B. (*Д. Прокопенко*)

Источник: http://tursavin.ru