XXII турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2016 года

Личная олимпиада

1. Пятеро малышей играли в прятки в двух комнатах, соединённых дверью. Миша сразу спрятался в шкафу около этой двери и слышал, что через дверь пробегали 93 раза. Сначала все находились в левой комнате. В конце Даня и Рита нашлись в правой комнате, а Юра – в левой. В какой комнате прятался Вася: в левой или в правой? (*Е. Бакаев*)

2. Восемь друзей сидели за круглым столом, и каждый поругался с обоими соседями, объявив их врагами. Они пошли к реке, где есть двухместная лодка. Смогут ли они все переправиться на другой берег так, чтобы в любой момент у каждого вместе с ним на берегу или в лодке друзей было больше, чем врагов? (*А. Шаповалов*)

3. Кола продаётся в бутылках по 0,5 литра, 0,75 литра и 1 литру. Петя и Вася купили k литров колы.

а) Всегда ли купленную колу можно разделить поровну на двоих, не открывая бутылок, если $k = 4$?

б) Та же задача для $k = 8$.

в) При каких целых k можно гарантировать, что купленную колу они смогут разделить поровну на двоих, не открывая бутылок? (*Е. Бакаев*)

4. 100-значное число делится как на сумму своих цифр, так и на их произведение. Может ли среди его цифр присутствовать цифра 5? (*Д. Шноль*)

5. **а**) На листе бумаги нарисовали три квадрата, размеры всех квадратов различаются. Все вершины этих квадратов отметили. Могло ли оказаться, что отмечено меньше девяти точек?

б) На листе бумаги нарисовали четыре квадрата, размеры всех квадратов различаются. Все вершины этих квадратов отметили. Могло ли оказаться, что отмечено меньше десяти точек? (*А. Шаповалов*)

6. Вначале на доске написано число 2016. Каждым ходом число можно уменьшить на любую из его ненулевых цифр (например, из 2016 можно получить 2010, 2014 или 2015). Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя.

а) Выигрывает тот, кто после своего хода получит 0. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

б) Проигрывает тот, кто после своего хода получит 0. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*А. Шаповалов*)

в) Перед началом игры Вася называет любое натуральное число N от 1 до 2000. Выигрывает тот, кто после своего хода получит число, меньшее N. Может ли Вася назвать такое N, для которого он гарантированно выиграет? (*А. Шаповалов, А. Грибалко*)

7. Стопку из 19 листов бумаги согнули пополам и сшили двумя маленькими скрепками так, что получилась тетрадка. На «обложке» Саша нарисовал вертикальные и горизонтальные линии (от края до края, не задевая скрепок). Когда он разрезал тетрадку по этим линиям, она распалась на 2016 отдельных частей.

а) Сколько горизонтальных линий провёл Саша, если вертикальных он провёл четыре?

б) Какое наименьшее количество линий мог провести Саша? (*А. Хачатурян*)

8. Можно ли разрезать равносторонний треугольник на три части и сложить из них прямоугольный треугольник? (*М. Волчкевич*)

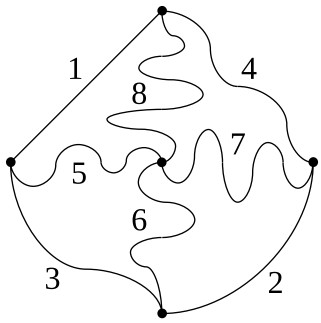
9. В шахматном турнире участвует 20 человек, которые в каждом туре разбиваются на пары (пары не повторяются). За победу начисляется 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0. Организаторы для экономии средств решили заканчивать турнир в тот момент, когда все участники наберут разное число очков. Через какое наименьшее количество туров может закончиться турнир? (*А. Блинков*)

10. Положительные числа a, b, c удовлетворяют условию $a + bc = (a + b)(a + c)$. Докажите, что $b + ca = (b + c)(b + a)$. (*А. Заславский, Б. Френкин*)

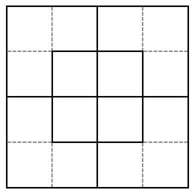
11. Точки M и N – середины параллельных сторон BC и AD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Докажите, что если MA – биссектриса угла BMN, то MD – биссектриса угла CMN. (*Д. Прокопенко*)

12. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена биссектриса CL. На стороне AC отмечена точка K так, что угол CLK прямой. Оказалось, что $AK = BC$. Найдите острые углы треугольника ABC. (*Е. Бакаев*)

13. **а**) Двоим патрульным с одним самокатом поручено «прочесать» восемь дорог, длины которых (в километрах) обозначены на схеме (см. рисунок). По каждому участку достаточно пройти или проехать одному патрульному. Патрульный покрывает за минуту 100 м пешком или 200 м на самокате. Они могут стартовать из разных точек и договорились, что каждый часть участков «прочешет» пешком, а часть – на самокате, передав или забрав его при встрече. За какое наименьшее время они смогут выполнить задание?



б) На сетке кварталов со стороной квадратика 100 м отмечено несколько участков улиц (см. рисунок, отмеченные участки нарисованы сплошной линией). Двое патрульных с велосипедом должны их «прочесать». По каждому участку достаточно пройти или проехать одному патрульному. Патрульный покрывает за минуту 100 м пешком или 300 м на велосипеде. Они могут стартовать из разных точек и договорились, что каждый часть участков «прочешет» пешком, а часть – на велосипеде, передав или забрав его при встрече. За какое наименьшее время они смогут выполнить задание? (*А. Шаповалов*)



14. Известно, что уравнение $bx^2 + a = 0$ имеет хотя бы один корень, а уравнение $cx^2 + b = 0$ корней не имеет. Имеет ли корни уравнение $ax^2 + bx + c = 0$? (*А. Блинков*)

15. В квадрат $ABCD$ вписана окружность, которая касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно. Прямая DK повторно пересекает окружность в точке M. Найдите угол ALM. (*М. Волчкевич*)

16. Из шахматной доски вырезали четыре угловые клетки. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга королей можно поставить на получившуюся доску? (*Е. Бакаев*)

17. На доске написано несколько различных целых чисел, сумма которых равна нулю. Может ли произведение этих чисел равняться 2016? (*М. Евдокимов*)

18. В выпуклом равностороннем шестиугольнике шесть диагоналей равны между собой. Обязательно ли равны между собой все его углы? (*М. Евдокимов*)

19. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На сторонах AC и BC отмечены точки K и L соответственно так, что $AK = BH$ и $BL = AH$. Точка M – середина отрезка KL. Докажите, что угол AMB прямой. (*Е. Бакаев*)

Командная олимпиада

20. Элиза плела рубашки из крапивы с постоянной скоростью с утра до вечера. В конце шестого дня она плела пятую рубашку, а в конце седьмого – шестую. К концу 13-го дня она как раз закончила очередную рубашку. Какую по счёту? (*Б. Френкин, И. Раскина*)

21. Один из воров – Антон, Борис, Вовочка или Гриша – украл драгоценности. Каждый из них является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо хитрецом, который никогда не произносит два правдивых утверждения подряд. Всем им известно, кто виноват на самом деле. На допросе каждый сделал два утверждения.

Антон: «Борис – хитрец. Вовочка или Гриша украл драгоценности».

Борис: «Вовочка – хитрец. Гриша или Антон украл драгоценности».

Вовочка: «Гриша – хитрец. Антон или Борис украл драгоценности».

Гриша: «Антон – хитрец. Борис или Вовочка украл драгоценности».

Сколько из восьми утверждений правдивых?

22. Петя и Вася по очереди выкладывают на доску 99×99 не перекрывающиеся доминошки, начинает Петя. Каждая доминошка покрывает две соседние по стороне клетки. Вася хочет, чтобы в конце на доске осталась непокрыта только одна клетка, а Петя пытается ему помешать. Кто сможет достичь своей цели, как бы ни играл соперник? (*А. Солынин*)

23. **а**) В классе 25 учеников. Каждый назвал число своих друзей среди одноклассников. Оказалось, что каждый ошибся в подсчётах ровно на 1 в ту или другую строну. Могла ли сумма названных чисел быть равной 100?

б) В зале n учеников. Каждый назвал число своих друзей в этом зале. Оказалось, что каждый ошибся в подсчётах ровно на 1 в ту или другую сторону, но чисел -1 и n никто не назвал. При каких n все названные числа могли оказаться различными? (*А. Шаповалов*)

24. **а**) От шахматной доски отрезали угловой квадрат 2×2. Разрежьте полученную фигуру по границам клеток на шесть равных частей. Части могут состоять из нескольких кусков.

б) От квадрата 4×4 отрезали угловой квадрат 1×1. Разрежьте полученную фигуру на шесть равных частей. Части могут состоять из нескольких кусков. (*А. Заславский*)

25. **а**) В коробке было 16 конфет четырёх видов – по четыре конфеты каждого вида. Их раздали восьмерым детям – по две конфеты каждому. Докажите, что какие-то двое детей получили либо четыре одинаковые конфеты, либо четыре различные.

б) Окружность разделена 16 точками на 16 одинаковых дуг. Точки раскрасили в четыре цвета – по четыре точки в каждый цвет. Докажите, что найдётся прямоугольник с вершинами в данных точках, все вершины которого раскрашены либо в один цвет, либо в четыре цвета. (*А. Грибалко*)

26. Вася умеет писать только цифры 1 и 2. Какое наименьшее натуральное число, кратное 2016, он сможет написать? (*М. Евдокимов*)

27. На доске 10×10 расставлено десять одноклеточных кораблей по правилам морского боя (то есть корабли не соприкасаются даже углами). Какое наименьшее количество выстрелов надо сделать, чтобы гарантированно уничтожить хотя бы один из них? (*Е. Бакаев*)

28. С соседних островов озера одновременно поплыли навстречу друг другу шлюпка и галера. За время от их старта до встречи бабушка пирата как раз связала синий шарфик. В другой раз, пока бабушка вязала красный шарфик, шлюпка успела проплыть 6 км по течению реки, а галера – 8 км против течения той же реки. Сколько километров между островами, если бабушка всегда вяжет шарфики одинаково быстро?

29. В треугольнике ABC угол A равен $10°$, а угол B равен $100°$. На стороне AC взяли точки M и N так, что $\angle ABM = \angle NBC$ и $AM = MN$. Найдите угол MBN. (*М. Евдокимов*)

30. Некоторые служащие конторы «Тоска» дружат между собой. Однажды на каждого служащего свалилось много дел. Но никто из них заниматься делами не способен. Вместо этого они ежедневно составляют список, сколько у кого дел. В конце рабочего дня каждый перекладывает по одному делу на каждого из своих друзей, у которых в этом списке дел было больше, чем у него. Если у кого-то таких друзей оказалось больше, чем дел, то он как попало выбирает, кому из них передать дело, а кому нет. Докажите, что рано или поздно служащие конторы прекратят перекладывать дела друг на друга.

31. Дана функция $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$. Найдите сумму значений этой функции при $x=\dfrac{1}{2016}, \dfrac{2}{2016}, \ldots, \dfrac{2015}{2016}$.

32. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AH_a и BH_b, точка O – центр описанной окружности. Точки X и Y симметричны H_a и H_b относительно середин сторон BC и AC соответственно. Докажите, что прямая CO делит отрезок XY пополам.

(*А. Заславский*)

33. Внутри треугольника со сторонами a, b, c отметили точку и провели из неё три отрезка, параллельные сторонам. Треугольник разбился на три трапеции с равными большими основаниями. Найдите длину этого основания. (*А. Шаповалов*)

Первый тур

34. **а**) Друзья купили в супермаркете шесть дынь суммарной массы 30 кг. Какого наименьшего количества пакетов заведомо хватит, чтобы унести все дыни? Один пакет выдерживает не более 10 кг, масса каждой дыни не превышает 10 кг.

б) Друзья купили в супермаркете несколько арбузов суммарной массы 30 кг. Какого наименьшего количества пакетов заведомо хватит, чтобы унести все арбузы? Один пакет выдерживает не более 15 кг, масса каждого арбуза не превышает 15 кг.

в) Друзья купили в супермаркете несколько ананасов суммарной массы 20 кг. Какого наименьшего количества пакетов заведомо хватит, чтобы унести все ананасы? Один пакет выдерживает не более 4 кг, масса каждого ананаса не превышает 1 кг. (*Е. Бакаев*)

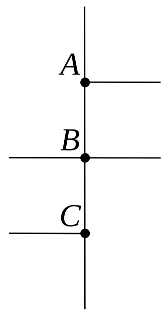
35. **а**) На столе лежит кучка из 55 орехов. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход надо разделить одну из имеющихся кучек на две меньшие и добавить ещё одну кучку орехов, равную одной из полученных (запас дополнительных орехов неограничен). Кто не может сделать ход, платит штраф. Может ли кто-то из мальчиков играть так, чтобы наверняка не платить штраф?

б) Та же задача, но каждым ходом добавляется не одна, а две кучки орехов, равные одной из полученных.

в) В условиях пункта б) может ли кто-то из мальчиков заставить соперника заплатить штраф, как бы тот ни играл, и если да, то кто? (*А. Шаповалов*)

36. Баба Яга полетела на метле из избушки на Лысую гору. В полночь на расстоянии 100 км от избушки она пересела в ступу. За 50 км до Лысой горы ступа прохудилась, и Бабе Яге пришлось лететь снова на метле. В результате она оказалась на Лысой горе в 2 часа ночи. За сколько времени Баба Яга долетит на метле обратно, если на метле она летает втрое медленнее, чем в ступе?

37. Гарри Поттер находится в лабиринте в точке B (см. рисунок). Он знает план лабиринта и то, что в одном из шести тупиков есть выход, а в остальных его ждёт смерть. В точках A, B, C есть указатели – стрелки, на которых показано направление выхода. Гарри знает, что все они направлены в одну сторону и ровно одна из них показывает неправильно. Достаточно ли этого, чтобы найти выход из лабиринта? (*Д. Шноль*)



38. Можно ли разрезать куб на кубики **а**) двух; **б**) 2016 разных размеров так, чтобы кубиков всех размеров было поровну? (*А. Шаповалов, И. Раскина*)

39. Рыбаки Петя и Вася поймали трёх рыб: двух щук и леща. Щуки весят 3600 г и 4200 г. Петя разделил рыб между ними так, что ему досталось на 80% больше по массе, чем Васе. Васе это не понравилось, поэтому он разделил рыб по-другому, и ему досталось на 40% больше, чем Пете. Сколько граммов весит лещ? (*А. Шаповалов*)

40. Если $\text{Г} \cdot \text{АМ} \cdot \text{МА} = 2015$, а $\text{Ш} \cdot \text{АШ} \cdot \text{КА} = 2016$, то чему равно $\text{К} \cdot \text{АШ} \cdot \text{КА}$? (*И. Николаева*)

41. Горизонтали доски 25×25 пронумерованы числами от 1 до 25 снизу вверх. В левой нижней клетке доски стоит слон. Петя и Вася ходят по очереди. За один ход Петя передвигает слона на любое количество клеток по диагонали вправо-вверх, а Вася – на любое количество клеток по диагонали влево-вверх. За каждый ход игрок получает столько очков, каков номер горизонтали, на которую он поставил слона. В конце игры слон оказался в левой верхней клетке доски. На сколько очков Вася набрал больше, чем Петя? (*Е. Бакаев*)

42. 100 художников писали портреты друг друга. Каждый написал **а**) 83 портрета; **б**) 75 портретов. Докажите, что найдутся три художника, каждый из которых изобразил двух других. (*С. Берлов*)

43. **а**) Число $x^2 - [x]\{x\}$ целое. Докажите, что и число $x[x]\{x\}$ целое.

б) Число $x^2 - [x]\{x\}$ – точный квадрат. Обязательно ли x целое? (*А. Шаповалов*)

44. В треугольнике ABC высота AH и медиана BM пересекаются в точке K. Найдите угол между высотой и медианой, если $AK = BC$. (*Е. Бакаев*)

45. На диагонали AC прямоугольника $ABCD$ выбраны такие точки E и F, что $AE = AB$ и $AF = AD$. На сторону AB опущены перпендикуляры EG и FH. Докажите, что $AG + FH = AC$.

46. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки H_a и H_c симметричны H относительно точек A и C соответственно. Прямая H_aC_1 пересекает прямую CB в точке A_2. Прямая H_cA_1 пересекает прямую AB в точке C_2. Докажите, что прямые AC и A_2C_2 параллельны. (*Д. Швецов*)

47. В треугольнике ABC с углом B, равным 60°, проведена биссектриса BL. Описанная окружность треугольника ABL пересекает сторону CB в точке A_1. Описанная окружность треугольника CBL пересекает сторону AB в точке C_1. Докажите, что центр описанной окружности треугольника A_1LC_1 лежит на прямой BL. (*Д. Швецов*)

48. В последовательности $a_1, a_2, \ldots$ целых чисел есть бесконечно много положительных и бесконечно много отрицательных членов. Для каждого n числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ дают различные остатки при делении на n. Сколько раз в последовательности встречается число 2016?

49. Дан квадратный трёхчлен $f(x)$. Известно, что уравнение $f(x^2 + 10) = f(x)$ имеет единственный корень. Какой?

Второй тур

50. Троих мальчиков спросили, сколько кому лет. Они дали следующие ответы.

Антон: «Мне 11 лет. Боре тоже 11 лет».

Боря: «Антону 10 лет. А Васе 11 лет».

Вася: «Мне 12 лет. У нас троих одинаковый возраст».

Известно, что три высказывания верны, а три – нет. Можно ли наверняка утверждать, что Вася старше Антона? (*Д. Шноль*)

51. Можно ли в каждую клетку прямоугольной таблицы 4×5 вписать по одной из букв М, А, Т, Б, О, Й так, чтобы каждая буква встречалась ровно в пяти рядах? Ряд – это строка или столбец, всего их девять. (*Е. Бакаев*)

52. Жители острова Чунга-Чанга живут в n хижинах. Праздник урожая на острове длится n дней. Каждый день жители очередной хижины отдыхают, а все остальные срывают с пальмы по одному кокосу и несут в эту хижину. Каждому её обитателю должно достаться ровно по $n-1$ кокосу. Лишние кокосы отдают губернатору острова, а если кокосов не хватило, губернатор выдаёт их из резервного фонда.

а) Пусть $n=5$, в первые три дня губернатор получил 10, 15 и 25 кокосов, а в четвёртый выдал 40 кокосов. Что произойдёт в последний, пятый день праздника?

б) Пусть $n=10$, в первые четыре дня губернатор получил 60, 50, 40 и 30 кокосов, а в следующие пять выдал 100, 70, 60, 20 и 10 кокосов. Что произойдёт в десятый день праздника? (*Д. Калинин, И. Раскина*)

53. В корзине лежали грибы, 52% из которых белые. Когда отложили три червивых гриба, среди оставшихся оказалась ровно половина белых. Сколько грибов могло быть в корзине изначально?

54. **а**) Гном-отец и гном-сын хотят переправить боевую группу эльфов из своего дома в Тайное место в тылу орков. Переправляются подземными тропами в одиночку или по двое. Не запомнив дороги, без проводника её не пройти. Вначале дорогу до Тайного места знает только гном-отец. Но всех проводить он не сможет: мимо Каменного стража у дороги каждый может пройти не более четырёх раз (иначе поднимется тревога). Остальные могут стать проводниками, запомнив дорогу. Гном запоминает дорогу, если его провели один раз, а эльфа для этого надо провести туда и обратно. Окончив переправу, гномы должны вернуться домой. Как гномам переправить группу из шести эльфов?

б) Какое наибольшее число эльфов можно переправить в условиях пункта а)?

в) Та же задача для семьи гномов из отца и N сыновей. (*А. Шаповалов*)

55. Сколькими способами в равенстве ** + ** = 17* можно заменить звёздочки цифрами так, чтобы оно было верным и все семь цифр были различными? (*Д. Шноль*)

56. У Маши есть n палочек, длины которых равны 1, 2, …, n. При каких n у Маши есть возможность сложить контур прямоугольника, используя их все? (*Е. Бакаев*)

57. **а**) В клетчатом квадрате некоторые клетки белые, остальные чёрные. Известно, что все крайние клетки чёрные. Назовём разноцветной парой две клетки разного цвета с общей стороной. Докажите, что количество разноцветных пар чётно.

б) Все грани куба разделены на одинаковые квадратики. Некоторые квадратики белые, остальные чёрные. Назовём разноцветной парой два квадратика разного цвета с общей стороной (не обязательно находящиеся на одной грани). Докажите, что количество разноцветных пар чётно. (*А. Грибалко*)

58. Алёша, Боря, Вася, Гриша и Дима играли в настольный теннис парами так, что каждые двое сыграли с каждой другой парой один раз. Ничьих в теннисе не бывает. Алёша в общей сложности проиграл 12 раз, а Боря – шесть раз. Сколько раз выиграл Вася? (*В. Каскевич*)

59. На десяти карточках написаны цифры, каждая по одному разу. Из девяти карточек составили три числа, сумма которых равна 2016, а десятую выбросили. Карточку с какой цифрой могли выбросить?

60. Город расположен на десяти островах, между некоторыми парами островов построены мосты. Известно, что если выбрать любые девять островов, то можно обойти их один за другим и в конце вернуться на начальный остров. Какое наименьшее количество мостов может быть в таком городе?

61. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$\frac{\text{Н}\cdot\text{Е}\cdot\text{Д}\cdot\text{Е}\cdot\text{Л}\cdot\text{И}\cdot\text{М}\cdot\text{О}\cdot\text{Е}+\text{Д}\cdot\text{Е}\cdot\text{Л}\cdot\text{И}\cdot\text{М}}{\text{Н}\cdot\text{Е}\cdot\text{Д}\cdot\text{Е}\cdot\text{Л}\cdot\text{Я}\cdot\text{М}\cdot\text{И}}.$$

(*Н. Стрелкова*)

62. На стороне AB квадрата $ABCD$ взяли точку M, а на продолжении его стороны AD – точку N. Оказалось, что $\angle CMN = 45°$. Докажите, что $BM = DN$. (*М. Волчкевич*)

63. В четырёхугольнике $ABCD$ углы A и D равны по 60°, а угол C равен 90°.

а) Найдите AB, если $AD = 6$, $CD = 5$.

б) Докажите, что $AB + AD = 2CD$. (*Е. Бакаев*)

64. Назовём год удачным, если его номер делится на все числа от 1 до 9, кроме одного. Например, 2016 год является удачным. А какой следующий удачный год? (*А. Блинков*)

65. На окружности отмечено 2016 точек. Каким наименьшим количеством непересекающихся выпуклых многоугольников можно покрыть все отмеченные точки так, чтобы каждые две соседние из них лежали в разных многоугольниках? (*Е. Бакаев*)

66. Можно ли на доске 63×63 расставить 63 не бьющих друг друга ферзей так, чтобы они находились в левом нижнем квадрате 33×33 и в правом верхнем квадрате 30×30? (*А. Грибалко*)

67. На основании равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, которая пересекает боковые стороны в точках M и N. Найдите угол при вершине треугольника, если длина отрезка MN равна полуразности боковой стороны и основания. (*М. Волчкевич*)

68. На сетке, состоящей из равносторонних треугольников со стороной длины 1, взяли треугольник со стороной длины n, стороны которого идут по линиям сетки, и отметили все узлы сетки, принадлежащие этому треугольнику. Найдите наименьшее возможное количество звеньев ломаной, проходящей через все отмеченные узлы (каждое звено может проходить через несколько узлов). (*М. Артемьев*)

69. Числа a и b таковы, что одновременно выполнены равенства $a^4 + 3a^3b = 3a^2 + 5$ и $a^3b + 4ab + 1 = a^4 + a^2$. Какие значения может принимать ab?

Третий тур

70. Начав с некоторого натурального числа, Петя каждым шагом увеличивает или уменьшает текущее число на какую-нибудь из его цифр (возможно, на 0), чередуя сложение и вычитание. Первая операция – сложение. Из какого наименьшего числа Петя может так получить **а**) 218; **б**) 2016? (*А. Шаповалов*)

71. Учеников в классе вдвое больше, чем парт. Если всех девочек посадить с мальчиками, то не менее чем за половиной парт окажутся мальчик с девочкой. А чтобы хватило мест за партами всем девочкам, достаточно использовать не более четверти всех парт. Во сколько раз мальчиков больше, чем девочек? (*Д. Калинин*)

72. Саша перемножил несколько первых натуральных чисел, а Маша перемножила несколько первых простых чисел. Оказалось, что Сашино и Машино числа состоят из одного и того же набора цифр. Найдите эти числа.

73. Волк пригласил к себе в гости трёх поросят и Красную Шапочку смотреть мультфильмы. После просмотра волк пересчитал кексы на кухне и заметил, что двух не хватает. У волка есть чашечные весы без гирь, на чаши которых он может помещать кексы, поросят и Красную Шапочку. Все кексы весят одинаково, все поросята в момент прихода в гости – тоже. Также известно, что Красная Шапочка на диете и поэтому не могла съесть более одного кекса. Как волку за два взвешивания определить, кто съел кексы?

74. **а**) На шахматной доске 47 клеток испачкано смолой. Докажите, что на чистые клетки можно поставить три не бьющие друг друга ладьи.

б) На шахматной доске 31 клетка испачкана смолой. Докажите, что на чистые клетки можно поставить пять не бьющих друг друга ладей.

в) Какое наименьшее количество клеток шахматной доски нужно испачкать смолой, чтобы на чистые клетки нельзя было поставить пять не бьющих друг друга ладей? (*Е. Бакаев*)

75. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут, – всего 100 человек. Каждому из них задали вопрос: «Сколько рыцарей среди твоих друзей на острове?», и в качестве ответов были получены все целые числа от 0 до 99. Сколько рыцарей живёт на острове? (*А. Шаповалов*)

76. При каких n можно расположить на плоскости n точек и соединить их отрезками так, чтобы из каждой точки выходило по три отрезка и никакие из отрезков не пересекались во внутренних точках?

77. Великаны Петя и Вася делят 100-пудовый кусок сыра. Сначала Петя делит кусок на две произвольные части. Потом Вася делит на две части одну из них.

а) После этого Петя забирает себе все куски, весящие целое число пудов, а Вася – остальные. Какую наибольшую массу может гарантировать себя Петя, как бы ни действовал Вася?

б) Затем снова одну из частей делит Петя. После этого Петя забирает себе все куски, весящие целое число пудов, а Вася – остальные. Какую наибольшую массу может гарантировать себе Петя, как бы ни действовал Вася? (*А. Шаповалов*)

78. Решите ребус $\dfrac{\text{РЕШИ}}{13} = \dfrac{\text{ЭТО}}{9} = \dfrac{\text{САМ}}{6}$. (*О. Крижановский*)

79. За круглым столом сидит n социологов, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда врёт. Социологи играют в игру «Опрос общественного мнения». Игра длится n раундов. В первом раунде каждый спрашивает соседа слева, правда ли, что $2 \times 2 = 4$. В каждом следующем раунде каждый социолог спрашивает своего соседа слева, получил ли он в предыдущем раунде ответ «Да».

а) Сколько ответов «Нет» могло прозвучать в последнем раунде при $n = 13$?

б) Пусть $n = 100$ и социолог Иван Иванович в последнем раунде получил ответ «Нет». Сколько ещё ответов «Нет» звучало во время игры?

в) Какое наибольшее число ответов «Нет» могло прозвучать во время игры при $n = 100$?

80. На гранях куба записаны числа (не обязательно положительные, не обязательно целые). Для каждой тройки граней с общей вершиной одно из чисел на этих гранях равно сумме двух других. Обязательно ли среди чисел есть равные? (*А. Шаповалов*)

81. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Наименьший собственный делитель натурального числа равен a. Наибольший собственный делитель этого числа равен $a^2 + 2$. Чему может быть равно это число?

82. На стороне AB равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отметили такую точку K, что угол ACK в 4 раза меньше угла B. Докажите, что $BC + BK = 2BM$, где M – середина стороны AC. (*Е. Бакаев*)

83. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили точки M и N соответственно и провели отрезки BN, CM и MN. Треугольник разбился на пять меньших треугольников. Могут ли все эти треугольники быть подобными? (*А. Шаповалов*)

84. Точки M и N – середины сторон AB и CD прямоугольника $ABCD$ соответственно. На отрезках AM, BM, CN, DN, MC, MD как на диаметрах построили окружности. Докажите, что существует окружность, касающаяся их всех. (*А. Акопян*)

85. В школьном однокруговом турнире по настольному теннису было $2n$ участников. Каждую игру судил один из остальных участников. Никто не судил какого-либо игрока более чем дважды. Докажите, что найдётся не менее двух игроков, у каждого из которых хотя бы раз повторился судья (возможно, у каждого свой). (*Б. Френкин*)

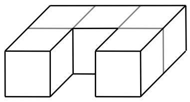
86. Дана бесконечная последовательность натуральных чисел, в которой каждое число, начиная со второго, равно количеству делителей предыдущего. В последовательности есть хотя бы четыре различных числа, но нет двух точных квадратов подряд. Докажите, что она содержит степень четвёрки. (*Б. Френкин*)

87. Дан параллелограмм *ABCD*. На диагонали *AC* взята точка *O*, прямая *BO* пересекает отрезок *CD* в точке *K*. Прямая, параллельная *AB* и проходящая через *O*, пересекает *BC* в точке *M*, а *DA* – в точке *N*. Оказалось, что четырёхугольник *BMKN* вписанный. Докажите, что прямые *AK* и *BN* перпендикулярны. (*П. Рябов*)

88. Найдите все пары различных чисел (a, b), для которых выполнены равенства $a^{200} - b^{200} = a^{100} - b^{100} = a - b$.

Финал

89. Из пяти единичных кубиков склеили фигурку в виде буквы П (см. рисунок). Можно ли из нескольких таких фигурок собрать какой-нибудь куб? (*Е. Бакаев*)



90. Десять бабушек, работая поодиночке, за час посадили 100 репок. Если несколько бабушек объединятся в группу, то каждая из них посадит среднее арифметическое количеств репок, которые эти бабушки сажали до объединения в группу (если это число окажется нецелым, то оно округляется в меньшую сторону). Они решили разбиться на группы (из более чем одного человека) так, чтобы за час снова посадить 100 репок. Можно ли гарантировать, что им это удастся? (*Е. Бакаев*)

91. По дороге до пункта А ходит автобус со скоростью 60 км/ч, скорость пешехода – 5 км/ч. Вдоль дороги на расстоянии 26 км от пункта А и ближе расположены дома. Можно ли построить одну автобусную остановку таким образом, чтобы каждый житель, живущий у дороги, мог добраться от своего дома до пункта А, проведя в пути не больше 2 часов? Временем ожидания автобуса и стоянки автобуса на остановке можно пренебречь.

92. По кругу стоит 1001 человек. Каждый принадлежит одному из трёх племён: рыцарей, лжецов или конформистов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда врут, а конформист может врать, только если стоит рядом с лжецом (но и в этом случае может сказать правду). Каждый заявил: «Мои соседи – из разных племён». Какое наименьшее количество лжецов может быть среди них? (*А. Шаповалов*)

93. Равносторонний треугольник со стороной n разбит линиями, параллельными сторонам, на равносторонние треугольнички со стороной 1. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. Каждым ходом разрешается сдвинуть фишку в соседний узел сетки, в котором фишка до этого не была. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход.

а) Кто может выиграть, как бы ни играл соперник, если $n = 9$, а фишка изначально находится в вершине треугольника?

б) Кто может выиграть, как бы ни играл соперник, если $n = 2016$, а Петя первым ходом ставит фишку в любой узел и двигает её в соседний узел?

в) Кто может выиграть, как бы ни играл соперник, если фишка изначально находится в вершине треугольника? (*А. Шаповалов*)

94. Три футбольные команды провели однокруговой турнир. Узнав про каждую команду общее число забитых и общее число пропущенных ею в этих матчах мячей, Саша сказал: «Могу доказать, что ничьих не было». Могут ли его слова быть правдой? (*А. Шаповалов*)

95. Саша пронумеровал клетки шахматной доски числами от 1 до 64 в каком-то порядке. Маша сделала то же самое со своей доской, но нумерация получилась другой. Может ли оказаться, что клетки Сашиной доски соединены ходом коня тогда и только тогда, когда клетки Машиной доски с теми же номерами соединены ходом короля? (*А. Солынин*)

96. Какой ребус имеет больше решений: О · Д · Е · С · С · А = М · А · М · А или Р · О · С · Т · О · В = П · А · П · А, если буквы соответствуют цифрам от 1 до 9? (*М. Козлов*)

97. В стране дураков бывают только солнечные и дождливые дни. Банк «Кэт-энд-фокс» работает круглосуточно и предлагает два вида вкладов:

1) вклад «Солнечный»: сумма по вкладу увеличивается на 20% каждый солнечный день и уменьшается на 20% каждый дождливый день;

2) вклад «Дождливый», который устроен ровно наоборот.

Буратино положил в ночь на 1 июля равные суммы денег на оба вклада. В ночь на 1 августа сумма по вкладу «Солнечный» была на 50% больше суммы по вкладу «Дождливый». Сколько солнечных дней было в июле? (*Д. Шноль*)

98. Сколько четырёхзначных чисел можно представить в виде суммы как четырёх, так и пяти последовательных натуральных чисел?

99. Клетки доски 10×10 заполнены числами. Назовём четырёхклеточный уголок упорядоченным, если в этом уголке каждое из двух чисел, имеющих двух соседей, больше одного из своих соседей и меньше другого. Какое наибольшее количество упорядоченных уголков (возможно, перекрывающихся) может оказаться на доске? Числа считаются соседями, если находятся в клетках с общей стороной. (*Е. Бакаев*)

100. **а**) Саша отметил на прямой пять точек и измерил все попарные расстояния между ними. Могли ли эти расстояния равняться 1, 2, …, 10?

б) Саша отметил на прямой несколько точек и измерил все попарные расстояния между ними. Получились числа 1, 2, …, N – все по одному разу. Чему могло равняться N?

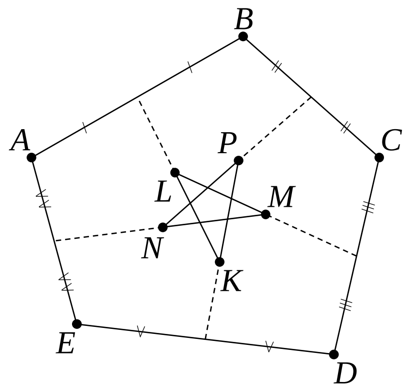
в) Какое наибольшее количество точек можно отметить на прямой так, чтобы все попарные расстояния между ними образовывали арифметическую прогрессию?

(*А. Грибалко*)

101. Для любых различных целых чисел a, b, c докажите неравенство $|(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3| \geq 6$.

102. Незнайка нарисовал внутри выпуклого пятиугольника пятиконечную звезду так, что продолжения сторон звезды пересекли стороны пятиугольника в серединах (см. рисунок). Для большей гармонии Незнайке хотелось бы нарисовать аналогичную картинку так, чтобы продолжения сторон звезды пересекали стороны пятиугольника не просто в серединах, а ещё и под прямыми углами. Можно ли это сделать?

(*Н. Стрелкова*)



103. В прямоугольнике $ABCD$ сторона BC в 2 раза больше стороны AB, точка E – середина AD, F – точка на продолжении стороны AD за точку D.

а) Известно, что $\angle AFC = 30°$. Найдите угол EBF.

б) Известно, что $\angle EBF = 30°$. Докажите, что FB – биссектриса угла AFC.

в) Известно, что $\angle EBF = \angle AFC$. Найдите угол AFC.

104. В перерыве между матчами чемпионата Европы футбольные судьи играют в следующую игру. Каждый судья приходит на игру с одной жёлтой и одной красной карточкой, все карточки сваливаются в кучу. Потом каждый берёт себе две какие-то карточки, и все судьи становятся в круг. По свистку все одновременно передают своему соседу слева одну карточку: если есть красная, то красную, а если нет – жёлтую. Затем снова звучит свисток, и снова все передают так же карточки и так далее.

а) Докажите, что через несколько раундов у каждого судьи будут на руках разноцветные карточки.

б) Через какое наименьшее число раундов у каждого судьи заведомо будут на руках разноцветные карточки, если всего судей n?

105. В равностороннем треугольнике ABC точки O и P – центр и середина меньшей дуги BC описанной окружности. Окружность, проходящая через точки A и B и касающаяся прямой AO, повторно пересекает прямую BC в точке Q. Докажите, что прямая OB делит отрезок PQ пополам. (*П. Рябов*)

106. Решите в целых числах уравнение $x(x+1)(x^2+x+2)=2y^2$.

107. В остроугольном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Описанная окружность треугольника ABL и биссектриса внешнего угла A пересекаются в точке M, а описанная окружность треугольника CBL и биссектриса внешнего угла C – в точке N. Прямая MN пересекает отрезок BL в точке K. Докажите, что описанные окружности треугольников AMK и CNK повторно пересекаются на прямой BL. (*Л. Попов*)

108. Прямоугольник $ABCD$ разбит сеткой на единичные клетки. На стороне BC отметили точку K, а на стороне CD – узел L так, что $\angle ALK = 45°$ и $\angle AKL < 90°$. На отрезке KL отметили все точки пересечения с линиями сетки. Докажите, что хотя бы одна из них удалена от точки A на рациональное расстояние. (*Е. Бакаев*)

Источник: http://tursavin.ru