XIX турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2013 года

Личная олимпиада

1. Две семьи (в каждой муж, жена и маленький сын) хотят переправиться с левого берега реки на правый. Есть двухместная лодка. Из всех шестерых грести умеет только один из мужчин. Сыновья могут быть на берегу только вместе с кем-нибудь из взрослых. Женщин нельзя оставлять в одиночестве. Как им всем переправиться? (*А. Шаповалов*)

2. Дан набор двухклеточных доминошек: четыре белых, восемь синих и 12 красных. Составьте из них квадратную рамку ширины 2 так, чтобы доминошки одного цвета не соприкасались даже углами. (*А. Шаповалов*)

3. Утёнок с гусёнком соревновались в триатлоне. Дистанция состояла из одинаковых по длине участков бега, плавания и полёта. Утёнок бежал, плыл и летел с одинаковой скоростью. Гусёнок бежал вдвое медленнее утёнка, зато плыл вдвое быстрее. Кто и во сколько раз быстрее летел, если и стартовали, и финишировали они одновременно? (*И. Раскина*)

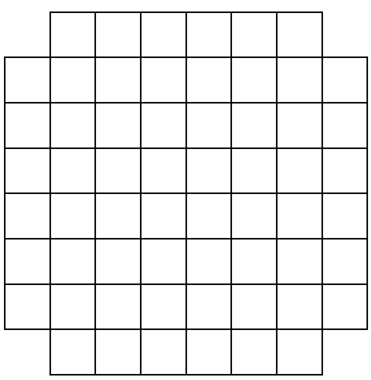
4. В понедельник, 1 января, Робин-Бобин съел одну конфету, 2 января – две конфеты, и весь год каждый день он ел на одну конфету больше, чем в предыдущий день. Однажды Робин-Бобин за два дня подряд съел в 7 раз больше конфет, чем в свой день рождения. На какие дни недели выпали эти два дня? (*А. Шаповалов*)

5. На прямой выбраны точки A, B, C, D, E, F, G так, что $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$, $DE = 4$, $EF = 5$, $FG = 6$, $GA = 7$. При каком расположении точек расстояние между крайними точками самое большое и чему оно равно? (*А. Хачатурян*)

6. Есть 2013 шариков **а**) четырёх цветов; **б**) не менее чем четырёх цветов. Докажите, что их можно разложить в кучки по три штуки так, чтобы в каждой кучке либо все три шарика были одинакового цвета, либо все три – разного цвета. (*А. Шаповалов*)

7. Произведение **а**) шести; **б**) десяти обыкновенных дробей равно 1. В каждой из дробей либо числитель, либо знаменатель увеличили на 1 так, что произведение не изменилось. Какое наименьшее количество числителей могло быть увеличено? (*А. Шаповалов*)

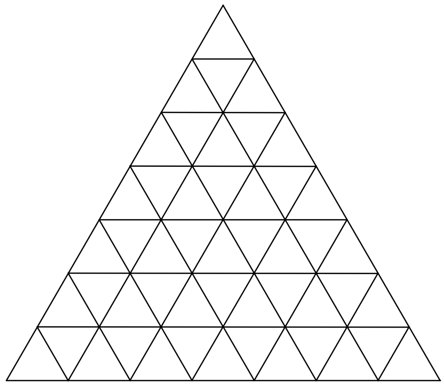
8. По проволочному каркасу прямоугольного ящика длиной 5 дм, шириной 4 дм и высотой 3 дм с одинаковыми скоростями бегают три муравья. Они стартовали одновременно из одной вершины и разбежались в трёх разных направлениях. Им нельзя встречаться и разворачиваться назад. Могут ли они через некоторое время оказаться одновременно на одном ребре: двое – в его концах, а третий – ровно посередине ребра? (*А. Шаповалов*)



9. **а**) Парк в плане представляет собой клетчатый квадрат 8×8 без четырёх угловых клеток (см. рисунок). Вершины квадратиков – пункты, стороны – дорожки. Петя и Вася играют, гуляя вместе. Сначала Петя выбирает стартовый пункт. Далее на каждом шаге они выбирают дорожку, по которой идут от текущего пункта к следующему, где ещё не были. Дорожки выбирают по очереди, начинает Вася. Проигрывает тот, кто не сможет выбрать дорожку. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

б) Та же задача, но парк в плане представляет собой равносторонний треугольник, разбитый на 49 меньших равносторонних треугольников (см. рисунок).

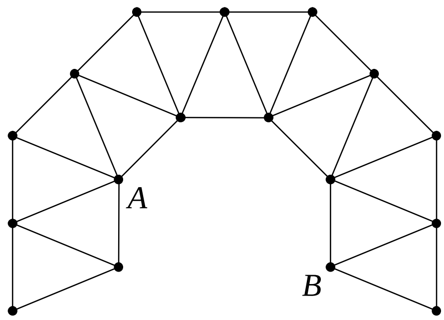
(*А. Шаповалов*)



10. Есть чашечные весы, правое плечо которых в 3 раза длиннее левого. Чтобы уравновесить такие весы, надо на правую чашу положить груз в 3 раза меньший, чем на левую. Имеется семь одинаковых на вид монет, из них шесть настоящих и одна фальшивая, которая легче настоящих. Как за два взвешивания на этих весах найти фальшивую монету? (*В. Трушков*)

11. Саша задумал два целых числа и перемножил их. Затем взял числа, обратные задуманным, и сложил. Полученные произведение и сумма оказались обратными числами. Найдите разность модулей Сашиных чисел. (*А. Блинков*)

12. Из равнобедренных треугольников с углом 45° при вершине и боковой стороной 1 сложили фигуру, как показано на рисунке. Найдите расстояние между точками A и B. (*М. Раскин*)



13. Через вершину B равностороннего треугольника ABC проведена прямая l. Вне треугольника построены две окружности: одна из них – с центром P – касается стороны AB в точке A_1, а также прямых l и AC, другая – с центром Q – касается стороны BC в точке C_1, а также прямых l и AC.

а) Докажите, что треугольник PBQ равнобедренный.

б) Докажите, что описанная окружность треугольника A_1BC_1 проходит через середину стороны AC. (*Д. Швецов, Ю. Зайцева, А. Соколов*)

14. Четыре мальчика и четыре девочки играют в настольный теннис на вылет. Двое играют партию, а остальные образуют очередь. Проигравший партию становится в конец очереди, а тот, чья очередь подошла, играет с победителем и так далее. Может ли к некоторому моменту случиться так, что все партии были только между мальчиками и девочками и каждый с каждой сыграл ровно по одному разу? (*А. Шаповалов*)

15. На доске написано число 23468. За один ход можно увеличить любые три его цифры на 1 («переходить через десяток» нельзя). Можно ли добиться, чтобы все цифры числа стали равными? (*А. Шаповалов*)

16. К гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC проведена высота CH. Вписанная окружность треугольника касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что середина отрезка A_1B_1 равноудалена от точек C_1 и H.

(*Д. Швецов*)

17. На доске 20×20 расставили 13 белых и 13 чёрных ладей так, что каждая из них бьёт ровно одну ладью другого цвета. Докажите, что на доску можно поставить ещё одну белую и одну чёрную ладьи так, чтобы по-прежнему каждая ладья била ровно одну ладью другого цвета. (*А. Грибалко*)

18. Прямоугольное поле разделено двумя перпендикулярными прямыми на четыре прямоугольных участка. Стоимость всех участков одинакова. Пьер и Жан купили противоположные участки. Площадь участка Пьера равна сумме площадей трёх других участков. Докажите, что цена земли за акр на участке Жана равна сумме цен за акр на остальных трёх участках.

19. На стороне AB треугольника ABC выбраны точки A_1 и A_2 на одинаковом расстоянии от вершин A и B, а на стороне BC – точки C_1 и C_2 на одинаковом расстоянии от вершин B

и C (отрезки A_1C_1 и A_2C_2 пересекаются). Пусть M, M_1, M_2 – середины отрезков AC, A_1C_1, A_2C_2 соответственно. Докажите, что отрезок BM делит отрезок M_1M_2 пополам.

(*Ю. Зайцева, А. Соколов*)

20. Натуральные числа от 1 до 100 разложили в три коробки. Докажите, что найдутся два числа из одной коробки, разность которых – точный квадрат.

21. Есть десять красных и десять жёлтых яблок общей массой 1 кг. Известно, что массы каждых двух яблок одного цвета отличаются не более чем на 40 г. Все яблоки разложили на пары «красное с жёлтым», причём красные выбирали в неубывающем порядке, а жёлтые – в невозрастающем (то есть к самому тяжёлому красному добавили самое лёгкое жёлтое, ко второму по массе красному – самое лёгкое из оставшихся жёлтых и так далее). Какова наибольшая возможная масса пары? (*А. Шаповалов*)

22. Двое играют в настольный теннис, а ещё несколько желающих образуют очередь. Проигравший партию становится в конец очереди, а тот, чья очередь подошла, играет с победителем и так далее. В некоторый момент оказалось, что каждый с каждым сыграл ровно по два раза. Докажите, что кто-то играл и в самой первой, и в самой последней партии. (*А. Шаповалов*)

Командная олимпиада и нулевой тур

23. Школа привезла на турнир учеников шестого, седьмого и восьмого классов. Треть учеников – девочки чётных классов, четверть – девочки младше восьмого класса, шестая часть – учащиеся шестых классов. Из-за неразберихи в один домик поселили всех шестиклассниц и всех мальчиков старше шестого класса, и это оказалась ровно половина учеников. Какая часть от всех мальчиков учится в шестом классе?

(*А. Шаповалов, И. Раскина*)

24. Можно ли клетчатый квадрат 8×8 разрезать по линиям сетки на 12 различных прямоугольников?

25. Сколько решений имеет ребус ТУРНИР + ИМЕНИ = САВИНА? (*Э. Акопян*)

26. В однокруговом футбольном турнире принимали участие четыре команды. За победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Вторая и третья команды набрали поровну очков, а первая набрала больше второй, причём на столько очков, на сколько третья набрала больше четвёртой. Сколько в этом турнире было ничьих?

(*А. Заславский*)

27. По дороге из пункта А в пункт Б и обратно ходят пять автобусов. Они идут без остановок, и каждый из них, дойдя до конца маршрута, разворачивается и идёт обратно. Однажды Вася, не застав автобус в пункте А, отправился в пункт Б пешком. При этом он 20 раз встретил автобус, идущий ему навстречу. Сколько раз автобусы обгоняли Васю, если, придя в пункт Б, Вася не застал там ни одного автобуса? (*С. Берлов*)

28. На острове живут два племени: рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. 100 жителей острова встали в круг.

а) Каждый ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Верно ли, что оба ваших соседа – рыцари?» Ответов «Да» оказалось столько, сколько было лжецов. Какое наибольшее число рыцарей могло быть в круге?

б) Каждый ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Лжец ли ваш правый сосед?» Ответов «Да» оказалось столько, сколько было лжецов. Какое наибольшее число лжецов могло быть в круге? (*А. Шаповалов*)

29. Клетки полоски 1×2013 последовательно пронумерованы числами от 1 до 2013. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно закрасить либо одну клетку, либо две соседние, из которых у левой номер чётный. Дважды закрашивать одну клетку нельзя. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

30. В строку выписано несколько чётных натуральных чисел. Каждое число, кроме самого левого, получается вычитанием из левого соседа его наибольшей цифры. Какое наибольшее количество чисел может быть в строке? (*А. Шаповалов*)

31. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на два треугольника, из которых складывается треугольник, не равный исходному. (*Б. Френкин*)

32. У маляра есть пять разных красок. Какое наибольшее количество клеток таблицы 99×99 он может покрасить так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и на каждой главной диагонали не было клеток одинакового цвета?

33. **а**) В государстве десять городов, каждые два соединены дорогой. Требуется проложить автобусные маршруты, каждый из которых проходит через все города по одному разу. Какое наибольшее число маршрутов может быть проложено, если по каждой дороге может проходить не более одного маршрута?

б) В государстве девять городов, каждые два соединены дорогой. Постройте четыре кольцевых автобусных маршрута, каждый из которых проходит через все города по одному разу, если по каждой дороге может проходить не более одного маршрута.

34. Назовём прямую хорошей, если она равноудалена от каких-то двух вершин данного треугольника. Какое наибольшее количество хороших прямых можно провести так, чтобы никакие две из них не были параллельны и никакие три не пересекались в одной точке? (*С. Маркелов*)

35. По кругу нарисовано восемь точек. Вася занумеровал их числами от 1 до 8 по часовой стрелке, написав номера невидимыми чернилами. Цель Пети – указать точку с номером 1. Для этого он сначала красит точки в два цвета, а затем получает ответы на вопросы типа «Какой цвет у точки с таким-то номером?» Как Пете наверняка достичь цели за три вопроса? (*Э. Акопян, С. Волчёнков*)

36. Кузнечики Алла и Борис без остановок скачут по рёбрам проволочного каркаса куба, меняя направление только в вершинах. Каждый прыжок длится ровно 1 секунду. Алла преодолевает ребро за семь прыжков, а Борис – за пять. Они стартовали из одной вершины. Через час Борис снова захотел оказаться в одной вершине с Аллой. Докажите, что он сможет сделать это, даже если Алла этого не хочет. (*С. Волчёнков*)

37. На доске написано 100 чисел. Среди попарных произведений этих чисел ровно 100 отрицательных, среди попарных сумм – тоже ровно 100 отрицательных. Сколько положительных чисел среди их попарных произведений? (*А. Шаповалов*)

38. Два натуральных числа друг на друга не делятся, при этом их НОД равен 50, а НОК равно 1000. Найдите эти числа. (*А. Шаповалов*)

39. Положительные числа a, b, c, d удовлетворяют равенствам $ab + cd = ac + bd = 4$ и $ad + bc = 5$. Найдите наименьшее возможное значение суммы $a + b + c + d$.

40. Биссектрисы острых углов A и B прямоугольного треугольника ABC пересекаются в точке I и повторно пересекают описанную окружность в точках A_1 и B_1. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AB в точке C_0. Докажите, что I – центр вписанной окружности треугольника $A_1B_1C_0$. (*Д. Швецов*)

41. Парк представляет собой равносторонний треугольник со стороной 60 м, разбитый дорожками на равносторонние треугольники со стороной 10 м. Администрация хочет осветить все дорожки этого парка, устанавливая фонари на пересечениях дорожек. Каждый фонарь освещает только 10 м прилегающей дорожки. Какое наименьшее количество фонарей понадобится администрации? (*М. Артемьев, И. Раскина*)

42. На плоскости нарисовали 100-угольник и отметили его вершины и середины всех сторон. Через эти 200 точек провели 200 параллельных прямых, причём никакие две из этих прямых не совпали. Могло ли оказаться, что расстояния между всеми парами соседних прямых равны? (*Е. Бакаев*)

Первый тур

43. Сколько существует четырёхзначных палиндромов, представимых в виде суммы двух палиндромов? (*Д. Шноль*)

44. В ряд через запятую выписаны числа 1, 2, …, 2013. Петя и Вася по очереди меняют запятые на знаки сложения или вычитания, начинает Петя. В конце вычисляется значение полученного выражения. Петя выигрывает, если результат **а**) делится на 3; **б**) не делится на 3, иначе выигрывает Вася. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

45. Самая умная из трёх подруг – Светы, Маши и Ани – всегда говорит правду, самая красивая всегда врёт, а самая высокая – когда как. Однажды Света и Маша сказали: «Обе мои подруги умнее меня», а Аня сказала: «Маша умнее…», а кого именно, её самой или Светы, никто не услышал. Кто есть кто? (*Д. Шноль*)

46. **а**) На шахматной доске стоят 50 пешек. Разрешается выбрать квадрат 2×2, в котором стоит одна пешка, и снять её. Докажите, что не удастся снять все пешки.

б) Поверхность куба $3\times3\times3$ разбита на единичные квадратики. Половина этих квадратиков окрашена в белый, а остальные – в чёрный цвет. Разрешается на любой грани выбрать квадрат 2×2, в котором ровно одна белая клетка, и покрасить эту клетку в чёрный цвет. Докажите, что нельзя сделать весь кубик чёрным, независимо от первоначальной раскраски.

в) Докажите то же утверждение для куба $5\times5\times5$, на котором первоначально в белый цвет окрашено 100 квадратиков. (*С. Волчёнков*)

47. На жёрдочке сидят попугаи и канарейки – всего не менее четырёх птиц. Может ли между каждыми двумя попугаями сидеть чётное число птиц, а между каждыми двумя канарейками – нечётное?

48. На клетчатом листе нарисован трёхклеточный уголок. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно вырезать так, чтобы каждый из них граничил с нарисованным хотя бы по вершине? (*Э. Акопян, Д. Калинин*)

49. В посёлке три избирательных участка. На каждом из них два года подряд подсчитывали, какая часть от всех явившихся избирателей голосует за партию серых. В этом году данный показатель на всех трёх участках оказался на 0,2 больше, чем в прошлом. А в целом по посёлку – на 0,2 меньше, чем в прошлом. Мог ли подсчёт голосов оказаться верным?

50. В многоэтажную дробь $Д+\cfrac{1}{Р+\cfrac{1}{О+\cfrac{1}{Б+\cfrac{1}{Ь}}}}$ вместо букв подставили различные ненулевые цифры. Какой наименьший результат мог при этом получиться? (*А. Шаповалов*)

51. В городе есть два банка. В каждый банк можно положить любую сумму денег, и через год банк выплачивает фиксированный процент от этой суммы (в разных банках проценты могут отличаться). Если в оба банка положить по 500 у. е., то за год можно заработать на процентах суммарно 250 у. е. Николаю вручили 5000 у. е. и сказали, сколько из них положить в первый банк, а сколько – во второй. При этом через год он должен был получить суммарный доход 1400 у. е. Однако Николай всё перепутал и положил в первый банк деньги, которые должен был положить во второй, и наоборот. На сколько меньше денег получит Николай через год? (*Э. Акопян*)

52. Есть восемь яблок, средняя масса которых равна 120 г. Массы каждых двух яблок отличаются не более чем вдвое. Докажите, что найдутся два яблока, средняя масса которых отличается от 120 г не более чем на 40 г. (*А. Шаповалов*)

53. Числа a, b, c таковы, что у прямых $y = ax + bc$, $y = bx + ca$ и $y = cx + ab$ есть общая точка. Докажите, что среди графиков есть совпадающие. (*А. Шаповалов*)

54. В треугольнике ABC с углом B, равным 60°, проведены высоты AA_1 и CC_1.

а) Докажите, что треугольник A_1MC_1 равносторонний, где M – середина стороны AC.

б) Докажите, что длина отрезка AC равна удвоенной длине отрезка A_1C_1.

55. В набор входят прямоугольники 1×1, 1×2, 1×3, 1×4, 1×5 и 1×6 – по одному каждого размера. Имеется три набора прямоугольников, в первом наборе все прямоугольники белые, во втором – синие, в третьем – красные. Можно ли уложить в один слой все три комплекта в клетчатый квадрат 8×8 с вырезанной угловой клеткой так, чтобы одноцветные прямоугольники не соприкасались даже углами? (*А. Шаповалов*)

56. Иванов, Петров и Сидоров – разного возраста. Их зовут Иван, Пётр и Сидор, их отцов звали так же. Определите, как полностью зовут каждого и кто кого старше, если известно, что никого не зовут так, как его отца, Иван младше Петровича, Петров младше Сидоровича, а Сидоров младше Сидора. (*А. Шаповалов*)

57. В выпуклом многограннике есть такие две вершины, что каждая грань содержит хотя бы одну из них. Докажите, что эти вершины можно соединить путём из не более чем трёх рёбер. (*А. Скопенков*)

58. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Окружность с центром O_1 касается сторон AB, BC, AD в точках K, L, M соответственно, а окружность с центром O_2 касается сторон CD, BC, AD в точках X, Y, Z соответственно. Прямые KL и XY пересекаются в точке P, а прямые KM и XZ – в точке Q. Докажите, что $O_1R = O_2R$, где R – середина отрезка PQ. (*Д. Швецов*)

59. Найдите все такие натуральные n и k, для которых выполняется равенство $(n + 1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

60. Прямая, проходящая через вершину B остроугольного треугольника ABC перпендикулярно CB, пересекает прямую AC в точке A_1. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно AB, пересекает прямую AC в точке C_1. Точки O_a и O_c – центры описанных окружностей треугольников ABA_1 и CBC_1 соответственно. Докажите, что точки O_a, B, O_c лежат на одной прямой. (*Д. Швецов*)

Второй тур

61. Петя и Вася делили два яблока массой 100 г и 150 г и одну грушу. Фрукты они не резали. Сначала делил Петя и взял себе вдвое больше (по массе). Недовольный Вася переделил по-другому, взяв себе в полтора раза больше Пети. Найдите массу груши. (*А. Шаповалов*)

62. **а**) На шахматной доске расставлено несколько белых и чёрных коней так, что каждый из них бьёт больше белых коней, чем чёрных. Может ли чёрных коней быть больше, чем белых?

б) На шахматной доске расставлено несколько белых и чёрных ладей так, что каждая из них бьёт больше белых ладей, чем чёрных. Может ли чёрных ладей быть больше, чем белых? (*А. Шаповалов*)

63. В кофейне встретились 55 человек – индийцев и турок, каждый из которых пил либо чай, либо кофе. Все индийцы говорят правду, когда пьют чай, и врут, когда пьют кофе, а все турки – наоборот. На вопрос «Вы пьёте кофе?» ответили «Да» 44 человека, а на вопрос «Вы турок?» – 33 человека. С утверждением «На улице идёт дождь» согласились 22 человека. Сколько индийцев в кофейне пили чай? (*С. Усов*)

64. Однокруговой турнир, в котором участвуют четыре команды, проходит в двух городах. В каждом из них можно проводить не более одной игры в день. Каждая команда может играть не более одного раза в день и в течение турнира не более одного раза переезжать в другой город. За какое наименьшее число дней можно провести турнир? (*А. Заславский*)

65. В клетках таблицы 3×3 расставлено девять различных натуральных чисел, не превышающих n. Каждые два числа в клетках с общей стороной имеют общий делитель, больший 1. Найдите наименьшее возможное значение n. (*Э. Акопян*)

66. Есть 20 неокрашенных кубиков. Каждым ходом Петя выбирает цвет (красный или синий), а Вася красит в этот цвет одну из ещё не окрашенных граней на любом кубике. Игра заканчивается, когда все кубики полностью покрашены. Петя получает от Васи столько рублей, сколько сможет выбрать по-разному окрашенных кубиков. Какое наибольшее число рублей он может наверняка получить, как бы ни играл Вася? (*А. Шаповалов*)

67. В слове, написанном русскими буквами, можно брать любые две буквы и менять их на соседние в алфавите (например, АВ $\to$ ББ). Можно ли такими действиями из слова ДРАКОН получить слово ТАРХУН? В русском алфавите 33 буквы. (*И. Руденко*)

68. **а**) Петя написал восемь различных чисел. Вася их не видел, но утверждает, что их можно расставить в вершинах куба так, чтобы все суммы на гранях тоже были различны. Прав ли Вася?

б) Есть 100 различных чисел. Всегда ли их можно расставить в вершинах и серединах сторон 50-угольника так, чтобы суммы чисел на сторонах тоже были различны? (*А. Шаповалов*)

69. Есть много единичных бумажных квадратов, в которых проведены обе диагонали. Квадратами оклеили в один слой поверхность куба с ребром длины 100 (при этом, возможно, перегибая квадраты через рёбра куба и располагая косо). Жучка посадили в одну из вершин куба и разрешили ползать только по диагоналям квадратов. Докажите, что он может добраться в какую-то другую вершину куба. (*А. Шаповалов*)

70. На плоскости дана прямая. Проведя только четыре линии циркулем и линейкой, постройте угол в 15°. (*Г. Филипповский*)

71. Петя задумывает несколько (больше двух) натуральных чисел и выписывает все их попарные суммы. Вася по выписанным Петей числам пытается отгадать задуманные числа. Верно ли, что если все суммы различны, то умный Вася всегда добьётся своей цели?

72. **а**) Три гусара ехали по улице друг за другом. Каждому в руки упало по цветку от девушек на балконе. Гусары знают, кто был в строю, но каждый видел только, кто и в каком порядке ехал впереди него и кто им бросал цветы (а кто бросил ему самому – не знает). Полковник видел только то, что его дочь бросила цветок ровно одному из этих гусар, и гусары тоже это знают. Полковник знает, кто именно ехал, но в каком порядке – не знает. Он может вызывать гусар поодиночке и задавать им вопросы, на которые те честно отвечают «Так точно», «Никак нет» или «Не могу знать». Как полковнику за три вопроса узнать, кому из них бросила цветок его дочь?

б) Та же задача для пяти гусар и пяти вопросов. (*А. Шаповалов*)

73. Два пловца стартовали одновременно по соседним дорожкам в 50-метровом бассейне на дистанции 1 км. Каждый плыл со своей постоянной скоростью. Первый пловец, завершив заплыв, вышел из бассейна. Второй продолжал плыть по дистанции. Всего пловцы встретились 16 раз (когда первый догоняет второго – это тоже встреча, момент старта встречей не считается). Во сколько раз первый пловец плыл быстрее второго? (*Л. Медников*)

74. Алёша и Боря независимо друг от друга складывают одни и те же n чисел в одном и том же порядке. На каждом шаге (написав первое число, прибавив второе и так далее) они делают следующее. Если дробная часть полученной суммы меньше 0,5, то Алёша округляет результат до ближайшего меньшего целого, а Боря не округляет. Если же дробная часть больше или равна 0,5, то Боря округляет до ближайшего большего целого, а Алёша не округляет. Какова наибольшая возможная разность между результатами Бори и Алёши? (*Б. Френкин*)

75. Придумайте способ разделить прямоугольный треугольник с углом 30° на два меньших треугольника так, чтобы какая-то биссектриса одного из этих треугольников была параллельна одной из медиан второго треугольника.

76. Числа x, y, z таковы, что выполнены равенства $x(x-1)+2yz=y(y-1)+2zx=z(z-1)+2xy$. Какие значения может принимать выражение $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$?

77. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I. Прямая, проходящая через точку I параллельно BC, пересекает стороны AB и AC в точках M и N. Найдите периметр треугольника AMN, если $AB=2$, $AC=1$.

78. На доске написано в ряд десять натуральных чисел. Известно, что каждое число больше предыдущего и делится на одно из предыдущих, первое число больше 1, а сумма всех чисел равна 275. Какие числа написаны на доске?

79. Найдите все такие тройки натуральных чисел (x, y, z), что $x^3-y^3=z^2$ и при этом y – простое число, а z не делится ни на 3, ни на y.

80. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C проведена медиана CM. Вписанная окружность треугольника AMC касается сторон AM и CM в точках K и L. Вписанная окружность треугольника BMC касается сторон BM и CM в точках P и Q. Докажите, что точка пересечения прямых KL и PQ лежит на биссектрисе треугольника ABC. (*Д. Швецов*)

81. На плоскости нарисованы прямые, про которые известно следующее:

1) на каждой прямой есть хотя бы две точки пересечения, причём расстояние между любыми точками пересечения не меньше 1;

2) прямые, проходящие через каждую точку пересечения, делят плоскость на равные углы.

Саша смотрит, сколько прямых пересекается в той или иной точке, и выписывает (по одному разу) все найденные им числа. Какие записи могут получиться у Саши? (*А. Шаповалов*)

Третий тур

82. Известно, что КОНФЕТА + ОМЛЕТ = КОТЛЕТА + СКЕЛЕТ и СТЕ + КЛ − ОМ = 65. Найдите Н. (*И. Раскина*)

83. **а**) На клетчатой плоскости можно строить дома-башни, занимающие одну клетку. Дома не должны соприкасаться даже углами. Постройте не более 16 домов так, чтобы наблюдателю, стоящему в некотором узле сетки, дома загораживали весь обзор. В углу дома наблюдатель стоять не может.

б) На клетчатой полуплоскости можно строить дома-башни, занимающие одну клетку. Дома не должны соприкасаться даже углами. Каким наименьшим количеством домов можно загородить обзор в сторону города наблюдателю, стоящему в некотором узле сетки на границе полуплоскости? В углу дома наблюдатель стоять не может.

в) На клетчатой плоскости можно строить дома-башни, занимающие одну клетку. Дома не должны соприкасаться даже углами. Какое наименьшее количество домов можно построить так, чтобы наблюдателю, стоящему в некотором узле сетки, дома загораживали весь обзор? Наблюдатель может стоять и в углу дома. (*А. Хачатурян*)

84. Коза напекла пирожков с капустой, а семеро козлят по одному сбегали украдкой на кухню. Не зная, кто из братьев уже поживился, каждый делил пирожки на несколько равных кучек (от двух до семи) и ел одну из них. Оказалось, что все съели различное число пирожков. Какое наименьшее количество пирожков могла испечь коза?

(*И. Раскина*)

85. Несколько школ договорились провести однокруговой турнир матбоёв, выставив по две команды и выделив по два учителя для судейства. При каком наименьшем количестве школ-участниц можно сформировать постоянные бригады судей из двух человек, составить расписание боёв по всем турам и судейство их бригадами так, чтобы никто из учителей не судил команду из своей школы? (*А. Блинков*)

86. С 1 июня по 10 июля 2013 года каждый день на пограничной заставе дежурили десять пограничников (остальные отправлялись на обход границы). Никакие два пограничника не дежурили вместе два раза. Докажите, что на заставе служило не менее 60 пограничников.

87. В противоположных угловых клетках шахматной доски стоят король Пётр и король Василий. Они ходят по очереди, начинает Пётр. Назовём расстоянием между королями наименьшее число ходов, за которое один из них может попасть на ту клетку, где стоит другой. Нельзя своим ходом увеличивать расстояние между королями, а также становиться на клетку, занятую другим королём. Выигрывает тот, кто первым достигнет противоположного края доски (горизонтали или вертикали). Какой король может выиграть, как бы ни играл соперник?

88. Мальвина написала на доске верное равенство. Буратино переписал его в тетрадку и стёр с доски. В тетради оказалось написано $437093 = 713695$. Тут Буратино понял, что пропустил знаки умножения, которых было ровно три. Помогите ему восстановить написанное Мальвиной равенство. (*Е. Бакаев*)

89. Ирокезы всегда говорят правду ирокезам и нагло врут делаварам, а делавары всегда говорят правду своим соплеменникам и предусмотрительно врут ирокезам. Как-то раз 12 индейцев сели за круглый стол, и каждый из них сказал своему соседу справа: «Ты ирокез» или «Ты делавар». Этих фраз оказалось поровну. Сколько ирокезов и сколько делаваров сидело за столом, если представителей других племён там не было?

90. Найдите все такие тройки (p, m, n), что p – простое, m и n – натуральные числа и $p^n + 144 = m^2$.

91. На каждой клетке квадрата стоит человек (лицом к одной из сторон клетки) и видит перед собой в профиль другого человека. Верно ли, что найдутся такие четыре человека А, Б, В, Г, что А видит Б, Б видит В, В видит Г, а Г видит А? (*А. Банникова*, *С. Волчёнков*)

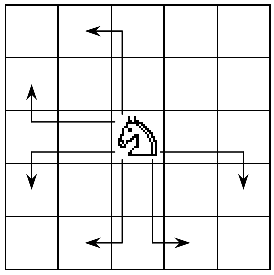
92. В квадрат вписан ромб так, что каждая вершина ромба лежит на стороне квадрата. Докажите, что этот ромб – квадрат.

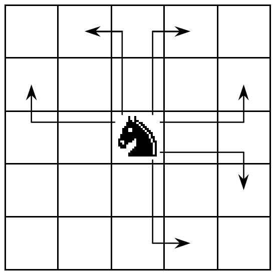
93. На балу никакой юноша не танцевал со всеми девушками, а каждая девушка танцевала хотя бы с одним юношей. Докажите, что среди присутствовавших на балу можно найти двух юношей и двух девушек так, что каждый из этих двух юношей танцевал лишь с одной из этих двух девушек, а каждая из этих двух девушек танцевала лишь с одним из этих двух юношей.

94. У гражданина Сидорова есть ровно столько денег, сколько нужно на покупку тонны кругликов и тонны шмугликов. Если он купит на 20% больше кругликов, то ему сделают 40-процентную скидку на шмуглики и оставшихся денег на покупку тонны шмугликов ему хватит. А если он купит на 40% больше шмугликов, то ему сделают 20-процентную скидку на круглики и оставшихся денег на покупку тонны кругликов ему тоже хватит. Что дороже и во сколько раз: тонна кругликов или тонна шмугликов?

95. Петя и Вася по очереди закрашивают клетки доски 4×4, начинает Петя. Запрещается делать ход, после которого образуется квадрат 2×2 из закрашенных клеток. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Может ли возникнуть такая ситуация, при которой Петя выиграет? (*В. Трушков*)

96. Двум коням запретили ходы по двум направлениям из восьми, оставив каждому по шесть разрешённых (см. рисунок). Коней выставили на доску. После нескольких ходов кони поменялись местами, ещё после нескольких они снова поменялись местами. Докажите, что после какого-то хода кони были на одной диагонали. (*А. Шаповалов*)





97. Перед Малышом и Карлсоном стоят семь коробочек с конфетами: в первой – одна конфета, во второй – две, …, в седьмой – семь. Они договорились есть конфеты по очереди. За один ход можно взять одну конфету из любой коробочки, первую конфету ест Карлсон. Если кто-то съедает последнюю конфету из коробочки, то забирает пустую коробочку себе. Какое наибольшее количество коробочек сможет получить Малыш, как бы ни старался Карлсон ему помешать? (*Е. Бакаев*)

98. Отличница Машенька нарисовала в тетрадке квадрат. Потом пришла хорошистка Даша и дорисовала на его стороне во внешнюю сторону равносторонний треугольник. Затем пришёл троечник Вася и вырезал полученную фигуру. И, наконец, Вовочка отрезал назло всем от этой фигуры некоторый треугольник. Машенька не расстроилась, так как новая фигура оказалась развёрткой прямоугольного тетраэдра. Отрежьте и вы такой треугольник. (*Д. Прокопенко*)

99. Вписанная окружность равнобедренного треугольника ABC касается боковых сторон AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Прямая AA_1 повторно пересекает вписанную окружность в точке D. Докажите, что описанная окружность треугольника ADC_1 касается прямой AC. (*Д. Швецов*)

100. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Назовём натуральное число интересным, если оно имеет не менее двух собственных делителей и делится на разность любых двух из них. Найдите все интересные числа.

101. Петя сложил куб и квадрат одного и того же отличного от нуля **а**) целого числа; **б**) действительного числа и сообщил результат Васе. Всегда ли Вася сможет однозначно определить Петино число? (*А. Блинков*)

102. Два племянника живут в посёлках, расстояние между которыми по прямому шоссе 90 км, а дядя – ровно посередине между ними. Дядя пригласил племянников в гости. У него есть мотороллер, скорость которого 40 км/ч, а с пассажиром – всего 30 км/ч. Для экономии времени все стартуют одновременно: ребята выходят пешком со скоростью 5 км/ч, а дядя выезжает на мотороллере, по очереди подбирает племянников на дороге и подвозит. Могут ли все собраться у дяди за 4 часа? (*А. Шаповалов*)

103. Есть пять яблок, каждое из которых весит 220 г. Их разрезали на куски и раздали 11 школьникам так, что каждый получил ровно по 100 г. Докажите, что хотя бы один из кусков весит меньше 44 г. (*К. Кноп*)

104. Внутри треугольника ABC взята точка D. Докажите, что $DA + DB + DC$ меньше суммы длин двух наибольших сторон треугольника. (*Н. Седракян*)

105. Прямоугольник разбили на прямоугольники так, что каждый граничит по отрезку ровно с N прямоугольниками. При каких N это возможно? (*А. Шаповалов*)

Финал

106. От фигуры разрешается прямолинейными разрезами одну за другой отрезать одинаковые фигурки. Существует ли треугольник, от которого таким образом можно отрезать **а**) десять фигурок; **б**) 100 фигурок; **в**) 2013 фигурок? (*С. Волчёнков*)

107. Петер Дирихле приобрёл 13 кроликов, весящих 1 кг, 2 кг, …, 13 кг. Один тут же сбежал, а остальных он рассадил в четыре клетки поровну и по количеству, и по массе. Кролик массой 1 кг оказался в первой клетке, массой 3 кг – во второй, а массой 11 кг – в третьей. Найдите массы всех трёх кроликов в четвёртой клетке.

108. **а**) В каждой вершине треугольника лежали камни. Поп поручил Балде уравнять количество камней в вершинах, перетаскивая камни вдоль сторон треугольника. По уговору за перетаскивание одного камня Балда давал попу щелчок. Известно, что Балда справился с заданием, при этом вдоль каждой стороны треугольника он носил камень хотя бы раз. Докажите, что можно было выполнить поручение и за меньшее число щелчков.

б) Докажите то же утверждение для пятиугольника.

в) В вершинах правильного 13-угольника расставлены целые числа. За одну операцию можно взять любую сторону и число в одном из её концов уменьшить на 1, а в другом – увеличить на 1. Гоша захотел сделать несколько операций так, чтобы числа во всех вершинах стали равны. Он добился желаемого, причём сделал это за наименьшее возможное количество операций. Докажите, что есть сторона, с которой Гоша не проводил ни одной операции. (*Е. Бакаев*)

109. Дед Мороз дал некоторым детям по десять конфет, три мандарина и две шоколадки, а Снегурочка остальным – по 12 конфет, четыре мандарина и четыре шоколадки. Они раздали 400 конфет и шоколадок вместе взятых. А сколько мандаринов?

110. По кругу стоят 2013 клеток. В каждой сидели белые и серые мыши, и на каждой клетке было написано, сколько в ней мышей каждого цвета. Потом из каждой клетки по одной мышке перебежало в соседнюю по часовой стрелке клетку. Можно ли утверждать, что найдётся клетка, оба числа на которой остались верными? (*И. Рубанов*)

111. Дон Кихот и Санчо Панса с жёнами и N монахинь подошли к переправе. Есть двухместная лодка, грести могут только Санчо и его жена. Никто из женщин не желает оказаться на берегу в одиночестве. Правила этикета запрещают женщинам быть в лодке или на берегу с другими мужчинами, если рядом нет мужа или другой женщины.

а) Смогут ли все они переправиться при $N = 10$?

б) При каких $N > 1$ все смогут переправиться? (*А. Шаповалов*)

112. На столе стоят четыре больших чайника: с холодной водой, с крепкой заваркой той же температуры, с горячей водой и с такой же горячей заваркой той же крепости. Человек хочет выпить стакан чая определённой крепости (не выше крепости заварки) и определённой температуры (между холодной и горячей). Докажите, что он сможет это сделать, использовав только три из четырёх чайников. (*Е. Красненко*)

113. Найдите наименьшее возможное количество слагаемых в равенстве МАЛО + МАЛО + … + МАЛО = МНОГО. (*И. Раскина*)

114. Про натуральные числа a, b, c известно, что ab делится на $2c$, bc делится на $3a$, а ca делится на $5b$. Найдите наименьшее возможное значение их произведения abc.

115. Белоснежка и семь гномов живут в доме в лесу. Каждый день гномы выходили на работу – кто на алмазный рудник, а кто в лес по ягоды. Оказалось, что в любые два дня (не обязательно последовательных) были по крайней мере двое гномов, каждый из которых поработал в обоих местах, но не друг с другом. Могла ли такая жизнь продолжаться **а**) 35 дней; **б**) 100 дней? (*С. Волчёнков*)

116. Найдётся ли строка из десяти натуральных чисел, в которой каждое следующее число делится на предыдущее, но имеет меньшую сумму цифр? (*А. Шаповалов*)

117. В треугольнике ABC с углом B, равным 60°, серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают биссектрису угла B в точках M и N соответственно. Известно, что M – середина отрезка BN. Найдите остальные углы треугольника ABC.

(*Р. Ефремов*)

118. На доске написано число 2. Петя и Вася играют в такую игру. Петя записывает на доску чётное число, потом Вася записывает число, кратное 3, затем Петя – число, кратное 4, и так далее. При этом новое число можно получить из предыдущего, либо дописав одну цифру в конце, либо стерев последнюю цифру, либо переставив цифры (оставлять число без изменения нельзя). Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник? (*С. Усов*)

119. Дано действительное число $r \geq 1$. По кругу написаны положительные числа, причём среди каждых трёх идущих подряд чисел одно равно сумме двух других, умноженной на r. Докажите, что количество чисел на круге делится на 3. (*Б. Френкин*)

120. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно. Докажите, что линия центров описанных окружностей треугольников AB_1C_1 и CB_1A_1 параллельна прямой AC. (*Д. Швецов*)

121. На поверхности кубика Рубика нужно отметить несколько клеток так, чтобы путь между каждыми двумя отмеченными клетками состоял не менее чем из трёх шагов (шаг – переход в соседнюю по стороне клетку). Какое наибольшее число клеток может быть отмечено? (*А. Грибалко*)

122. **а**) В ряд лежат девять апельсинов, массы соседних отличаются не более чем на 10 г. Докажите, что их можно разложить по три штуки в пакет и положить пакеты в ряд так, чтобы массы каждых двух соседних пакетов отличались не более чем на 10 г.

б) Докажите, что в аналогичной задаче для 300 апельсинов их можно разложить по 100 штук в пакет. (*А. Шаповалов*)

123. Фирма «Рога и копыта» разделилась на фирму «Рога» и фирму «Копыта» с разным числом сотрудников. Директор фирмы «Рога» получает такую же зарплату, как директор фирмы «Копыта», и средняя зарплата всех остальных сотрудников фирмы «Рога» совпадает со средней зарплатой всех остальных сотрудников фирмы «Копыта». Кроме того, средняя зарплата всех сотрудников фирмы «Рога» совпадает со средней зарплатой всех сотрудников фирмы «Копыта». Что больше: зарплата директора фирмы или средняя зарплата всех остальных сотрудников? (*А. Штерн*)

124. Каждый из 19 компьютеров соединён проводами со всеми остальными. Провода окрашены в три цвета, и из каждого компьютера выходит поровну проводов всех цветов. Докажите, что найдутся три компьютера, соединённые проводами трёх цветов.

125. В однокруговом хоккейном турнире принимали участие 16 команд. За победу начислялось 2 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. Оказалось, что ровно 15 команд поделили второе место. Сколько очков могла набрать команда, ставшая чемпионом?

126. Найдите все тройки чисел (x, y, z), для которых выполняется равенство

$$\sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-2} = \frac{x+y+z}{2}.$$

(*А. Хачатурян*)

127. Белоснежка и семь гномов живут в доме в лесу. В каждый из 16 последовательных дней гномы работали на алмазном руднике или собирали ягоды в лесу. Весь день каждый гном посвящал ровно одному из этих занятий. В любые два дня (не обязательно последовательных) были по крайней мере трое гномов, каждый из которых поработал в обоих местах. Известно, что в первый день все семеро работали на руднике. Докажите, что в один из этих 16 дней все семеро собирали ягоды.

Источник: http://tursavin.ru