XXVI турнир математических боёв имени А.П. Савина

База отдыха «Берендеевы поляны»
Костромская область
26 июня - 2 июля 2021 года

Личная олимпиада

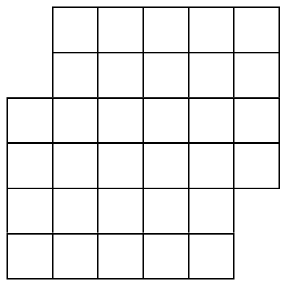
1. Используя только две цифры, Петя написал шестизначное число, которое делится на 2021. Найдите какое-нибудь число, которое мог написать Петя. (*М. Евдокимов*)

2. Можно ли распилить каркас куба на три одинаковые части? Части считаются одинаковыми, если их можно совместить в пространстве. (*С. Токарев*)

3. Школьный турнир по настольному теннису проходил по такой системе: в каждом туре игроки разбивались на пары и играли по одной партии, при этом до финала пары не повторялись. Школьник, проигравший дважды, выбывал из турнира (ничьих в теннисе не бывает). Если в каком-то туре количество участников было нечётно, то один проходил в следующий тур без игры. Сколько человек участвовало в турнире, если до финала, в котором играли двое, было сыграно 29 партий? (*А. Блинков*)

4. Тётя Маша купила в магазине 17 наименований продуктов. Кассовый аппарат сломался и, вместо того чтобы после списка стоимостей товаров напечатать общую сумму, напечатал их среднее арифметическое, да ещё не в конце, а в неизвестном месте списка. Как, глядя на чек, найти реальную стоимость покупки, не проверяя перебором, какое из напечатанных чисел является средним арифметическим остальных? (*А. Хачатурян*)

5. Можно ли разрезать фигуру, изображённую на рисунке, по линиям сетки на четыре равные части? (*Н. Чернятьев*)



6. К кабинке канатной дороги, идущей на гору, подошли гномы. Как вверх, так и вниз кабинка ходит с двумя или с тремя пассажирами, при этом пассажиры сидят на двух скамьях так, чтобы массы на скамьях были одинаковыми.

а) Как всем гномам подняться на гору, если их восемь, а их массы равны 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5 и 6 стоунов?

б) Та же задача, если массы гномов равны 1, 1, 2, 2, 3, 4, 8 и 9 стоунов.

в) При каких $n > 2$ на гору смогут подняться $n + 2$ гнома массами 1, 1, 2, 2, 3, 4, …, n стоунов? (*А. Шаповалов*)

7. Есть ли решение у ребуса $\frac{\text{ПЯТЬ}}{\text{ШЕСТЬ}} = \frac{5}{6}$? (*Е. Бакаев*)

8. **а**) У Саши есть набор палочек суммарной длины 1 м. Он может выбирать несколько палочек и складывать из них контур прямоугольника. Известно, что Саша может так получить прямоугольник любой из следующих площадей: 1 дм^2, 3 дм^2 и 5 дм^2. Может ли в наборе быть всего семь палочек?

б) У Павла есть набор палочек различной длины. Он может выбирать несколько палочек и складывать из них контур прямоугольника. Известно, что Паша может так получить прямоугольники пяти различных площадей. Какое наименьшее количество палочек может быть у Павла в наборе? (*А. Шаповалов*)

9. **а**) На шахматной доске стоит несколько королей. Может ли каждый из них бить ровно четырёх других?

б) При каком наибольшем k можно расставить несколько королей на шахматной доске так, чтобы каждый из них бил ровно k других? (*А. Шаповалов*)

10. Можно ли представить число 100 в виде суммы двух различных натуральных чисел, каждое из которых делится на сумму цифр другого? (*А. Шаповалов*)

11. Петя и Вася идут рядом с одинаковой постоянной скоростью. Когда им на пути встретился траволатор, Петя пошёл рядом с ним, а Вася – по траволатору. Через минуту они одновременно подошли к концу траволатора, но по пути Вася на 15 секунд остановился завязать шнурки. За какое время Вася прошёл бы траволатор, если бы не останавливался? (*М. Хачатурян, В. Клепцын*)

12. **а**) Существуют ли три различных целых числа, из которых можно составить как арифметическую, так и геометрическую прогрессию (не обязательно в том же порядке)?

б) На заборе написано три различных целых числа, из которых можно составить как арифметическую, так и геометрическую прогрессию (не обязательно в том же порядке). Известно, что одно из чисел равно 2021. Найдите два других числа. (*Н. Наконечный*)

13. Есть треугольная салфетка с углами 40°, 60°, 80°. Можно ли сложить её несколько раз так, чтобы полученный многоугольник был покрыт в два слоя? (*А. Пешнин*)

14. Разбойники подарили Али-Бабе круглый торт. На нём размечены радиусы, делящие его на 41 равную порцию. Сколькими способами можно разрезать торт по трём радиусам так, чтобы среди получившихся кусков были равные? Способы считаются различными, если разрезы идут по разным наборам радиусов.

15. В доме два лифта: пассажирский и грузовой, каждый из них ходит вверх и вниз с постоянной скоростью. Сейчас пассажирский лифт на 10-м этаже, а грузовой – на 21-м. Саша живёт на 18-м этаже, а Ваня – на самом верхнем, и оба они хотят спуститься на первый этаж. Саше безразлично, какой лифт вызвать – он спустится за одинаковое время. Любопытно, что и Ване тоже всё равно, какой из лифтов вызывать. Сколько этажей в доме? (*А. Блинков, А. Хачатурян*)

16. На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P, а на стороне BC – точка Q так, что прямая PQ перпендикулярна AC. Известно, что $AP = 4$, $BQ = 3$, $CQ = 2$. Найдите углы треугольника ABC. (*Е. Бакаев*)

17. Контроль времени «5 + 3» в шахматной партии устроен так: у игрока на часах первоначально 5 минут, а после каждого его хода к остатку времени добавляется 3 секунды (ход считается завершённым и при истечении времени на часах в момент нажатия кнопки). На первый свой ход Петя потратил 1 секунду, на второй – 2 секунды, на третий – 3 секунды и так далее. Какое наибольшее число ходов он мог сделать? (*С. Токарев*)

18. В прямоугольнике $ABCD$, отличном от квадрата, на биссектрису угла A опущен перпендикуляр CH. Докажите, что длина отрезка BH больше четверти периметра прямоугольника. (*А. Пешнин*)

19. В сундуке лежат монеты пяти видов: луидоры, пиастры, дублоны, песеты и талеры. Известно, что если вынуть из сундука любые 100 монет, то среди вынутых видов обязательно найдутся два таких, что количество монет этих видов среди вынутых отличается не меньше чем на 3. Какое наибольшее количество монет может быть в сундуке? (*А. Шаповалов*)

20. Дан прямоугольный треугольник ABC. На его гипотенузе AB отмечена точка D так, что $CD^2 = AD \cdot BD$. Обязательно ли CD – высота треугольника? (*А. Блинков*)

21. Решите в натуральных числах уравнение $m! + n! = m^n$. (*А. Грибалко*)

22. Поверхность куба оклеена в один слой несколькими параллелограммами. Обязательно ли среди них найдётся прямоугольник? (*В. Произволов*)

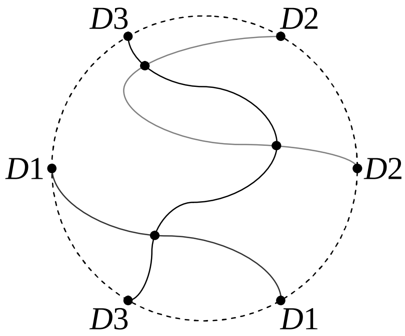
23. У Педро есть много монет шести видов: луидоры, пиастры, дублоны, песеты, талеры и эскудо. Он должен взять несколько монет так, чтобы из них нельзя было составить две кучи по 60 монет, в каждой из которых поровну монет используемых видов (например, все 60 монет одного вида или по 20 монет трёх видов). Какое наибольшее количество монет может взять Педро? (*А. Шаповалов*)

Командная олимпиада

24. Барон Мюнхгаузен утверждает, что расставил цифры 0, 1, 2 в клетках таблицы 7×7 так, что число 2021 можно прочесть (по горизонтали, вертикали или диагонали, причём в любом направлении) более чем 30 способами. Могут ли слова барона быть правдой? (*О. Медведь*)

25. На острове живут 100 аборигенов разного возраста. Каждый из них всегда говорит правду или всегда врёт. Однажды все жители острова встали в круг, и каждый сказал, что оба его соседа старше него. Ночью нескольких аборигенов съели, а на следующий день оставшиеся снова встали в круг, и каждый заявил, что оба его соседа младше него. Какое наименьшее число аборигенов могло быть съедено? (*А. Грибалко*)

26. Сергей спроектировал три центральных диаметра (см. рисунок). Ему особенно понравилось, что на линиях $D1$, $D2$ и $D3$ получилось соответственно 1, 2 и 3 пересадочных станции. Сможет ли Сергей спроектировать пять диаметров, сохранив это свойство? Каждая пересадочная станция является пересечением ровно двух диаметров. (*А. Хачатурян*)



27. В первом раунде телевикторины «Своя игра» участникам было предложено 30 вопросов. Каждый вопрос относится к одной из шести тем и имеет одну из пяти стоимостей (см. рисунок). Чтобы выбрать вопрос, игрок произносит два слова: название темы и стоимость. Но если в строке или в столбце остался всего один вопрос, то для его выбора нужно произнести одно слово (название темы или стоимость соответственно). Когда в раунде остаётся последний вопрос, ничего произносить не надо – он выбирается автоматически.

АЛГОРИТМЫ	100	200	300	400	500
ГРАФЫ	100	200	300	400	500
ИГРЫ	100	200	300	400	500
ЛОГИКА	100	200	300	400	500
ПЕРЕПРАВЫ	100	200	300	400	500
ТУРНИРЫ	100	200	300	400	500

а) Какое наибольшее количество слов могут произнести участники, чтобы разыграть все вопросы раунда?

б) Сколько слов могут произнести участники, чтобы разыграть все вопросы раунда? (*А. Грибалко*)

28. Назовём равносторонние многоугольники ровесниками, если у них одинаковое число сторон и одинаковые длины сторон. Квадрат разбили на несколько ровесников.

а) Обязательно ли все ровесники – квадраты?

б) Обязательно ли число ровесников – точный квадрат? (*А. Шаповалов*)

29. Автомобилист увидел впереди светофор, а ещё трёх сусликов, неподвижно сидящих у дороги. Расстояние от него до светофора было равно 300 м, сумма расстояний до всех сусликов – тоже 300 м.

а) Через какое-то время автомобилист проехал мимо всех трёх сусликов, а сумма расстояний от него до сусликов снова оказалась равной 300 м. Чему было равно расстояние от автомобилиста до светофора в этот момент?

б) Через какое-то время сумма расстояний от автомобилиста до сусликов снова оказалась равной 300 м. Какое наименьшее расстояние от автомобилиста до светофора могло быть в этот момент? (*М. Артемьев*)

30. Разрежьте квадратный лист бумаги на две части, которыми можно оклеить в один слой поверхность некоторого параллелепипеда. (*С. Токарев*)

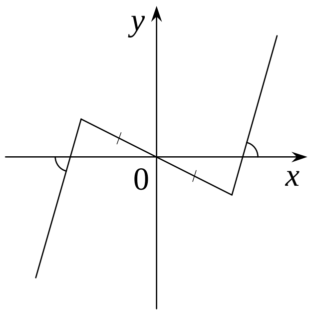
31. Имеется **а**) 20 карточек с номерами 1, 2, …, 20; **б**) 100 карточек с номерами 1, 2, …, 100. Номера написаны невидимыми чернилами, но Вася может видеть их сквозь специальные очки. За одну попытку Петя разбивает карточки на пары, а Вася указывает все пары с нечётной суммой номеров. За какое наименьшее число попыток Петя сможет наверняка разбить все карточки на пары с нечётной суммой? (*А. Шаповалов*)

32. На доске подряд написаны цифры 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0. Саша поставил между двумя из них знак «=», а между некоторыми из остальных – знак «+» так, что получилось верное равенство. Между какими цифрами он поставил знак «=»? (*А. Блинков*)

33. Каждая грань треугольной пирамиды разбита на четыре равных треугольника. Можно ли в этих треугольниках расставить все натуральные числа от 1 до 16 так, чтобы суммы чисел на всех гранях были одинаковы и суммы чисел при всех вершинах тоже были одинаковы? (*С. Токарев*)

34. Поверхность куба с ребром длины 1 дм надо оклеить в один слой четырьмя прямоугольниками, вырезанными из одного бумажного квадрата. Продаются всевозможные квадраты со стороной в целое число сантиметров. Квадрат какого наименьшего размера придётся купить? (*А. Шаповалов*)

35. На рисунке изображён график функции $y = a|x - m| + b|x - n| + cx + d$. Единичные отрезки на осях, а также отмеченные на рисунке отрезки и углы равны. Приведите пример возможного значения параметров a, b, c, d, m и n. (*Д. Шноль*)



36. На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили точки K и L соответственно. Оказалось, что отрезки AL и CK равны, а угол между ними равен углу B. Верно ли, что треугольник ABC равнобедренный? (*Е. Бакаев*)

37. Три поросёнка построили себе крепость, а дом из камней продают. Каждый день ровно один из них меняет цену дома. Смелый Нуф-Нуф поднимает её на 25%, жадный Ниф-Ниф – на 28%, а мудрый Наф-Наф опускает в 4 раза. В понедельник коза приценилась, но не купила. А когда всё же купила, дом уже стоил вдвое дороже. В какой день недели коза купила дом? (*И. Раскина*)

38. Точки P и Q лежат на диагонали AC квадрата $ABCD$. Точки X и Y на сторонах CD и AD соответственно таковы, что $\angle BPX = \angle BQY = 90°$. Точка Z – середина отрезка XY. Найдите угол PZQ. (*А. Доледенок*)

39. **а**) Есть семь кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 камнями и краски 100 цветов. Гриша и Саша ходят по очереди, начинает Гриша. За один ход надо покрасить любой из неокрашенных камней. Нельзя красить в цвет, который уже есть в данной кучке. Тот, кто первым использовал новый цвет, платит сопернику рубль. Игра заканчивается, когда окрашены все камни. Выигрывает тот, кто получит больше денег (при равенстве – ничья). Каким будет результат при наилучшей игре сторон?

б) В аналогичной игре для n кучек с 1, 2, …, n камнями и неограниченного числа цветов для каждого n определите результат при наилучшей игре сторон. (*А. Шаповалов*)

40. В стране 100 городов, некоторые из них соединены дорогами. Назовём два города близкими, если они соединены дорогой, и далёкими, если между ними существует путь, проходящий через каждый из остальных городов ровно по одному разу и не заходящий повторно ни в один из этих двух городов. Может ли оказаться, что каждые два города являются либо близкими, либо далёкими, но не близкими и далёкими одновременно? (*Н. Чернятьев*)

41. Известно, что $a^{2021} + k_1a^{2020}b + k_2a^{2019}b^2 + \ldots + k_{2020}ab^{2020} + b^{2021} = 0$, где a и b – натуральные, а k_i – целые числа ($i = 1, 2, \ldots, 2020$). Чему может быть равна сумма $k_1 + k_2 + \ldots + k_{2020}$? (*Б. Френкин*)

42. На столе лежат 300 монет трёх разных масс, по 100 штук каждой массы. Ревизор делает две серии проверок. В каждой серии он разбивает все монеты на столе на пары, сравнивает на чашечных весах монеты в каждой паре и кладёт себе в карман все пары, в которых монеты имеют разную массу. Какое наибольшее число монет может гарантированно положить себе в карман ревизор? (*А. Шаповалов*)

43. Точки E и F – середины сторон AD и BC прямоугольника $ABCD$ соответственно. На стороне CD отмечена точка K, точка L симметрична ей относительно точки D. Докажите, что прямые BD, EK и FL пересекаются в одной точке. (*А. Блинков*)

Первый тур

44. Если налить в чашку треть её объёма мёда и добавить ложку дёгтя, то уровень содержимого поднимется до половины высоты. А если налить мёда до половины высоты и положить ложку дёгтя, то дёгтя будет в 10 раз меньше по объёму, чем мёда. Сколько ложек в чашке? (*М. Хачатурян, М. Раскин*)

45. Петя написал в строку k раз номер своей квартиры через пробелы. Маша должна поставить между каждыми двумя соседними числами знаки арифметических действий, а там, где захочет, – скобки. Она утверждает, ещё не зная номера Петиной квартиры, что сможет получить в результате любое натуральное число от 1 до n. Права ли она, если **а**) $k = 100$, $n = 1000$; **б**) $k = 200$, $n = 2021$; **в**) $k = 100$, $n = 2021$? (*Д. Шноль*)

46. Каждая грань куба $5 \times 5 \times 5$ разбита на 25 клеток. Петя оклеил поверхность куба фигурками, каждая из которых покрывает ровно пять клеток (фигурки он мог перегибать через рёбра куба). Какова наименьшая возможная сумма периметров этих фигурок? (*А. Шаповалов*)

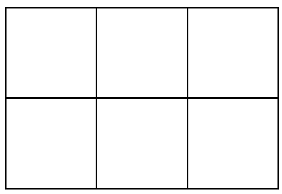
47. **а**) На трибунах стадиона собралось 500 болельщиков. Среди любых 26 из них найдутся шесть граждан одной страны. Докажите, что среди любых 22 болельщиков найдутся граждане одной страны.

б) На плоскости проведено 500 прямых. Среди любых 26 из них найдутся шесть параллельных. Докажите, что среди любых 66 из них найдутся 14 параллельных. (*А. Шаповалов*)

48. В каждом раунде игры «Что? Где? Когда?» разыгрывается 1 очко, которое достаётся либо знатокам, либо телезрителям. Игра идёт до 6 очков. Олег захотел посмотреть игру в записи, но случайно прочитал в комментариях финальный счёт. Всё же он не увидел, кто победил, поэтому начал просмотр. По окончании восьмого раунда Олег сказал: «До этого было интересно смотреть: я не знал, чем закончится каждый раунд, а вот теперь знаю исходы всех оставшихся раундов». С каким счётом завершилась игра? (*А. Грибалко*)

49. К левому берегу реки подошли моряк и алеут, а к правому – два моряка и два алеута. Всем нужно на противоположный берег. У левого берега есть двухместная лодка. Моряки избегают быть в меньшинстве на одном берегу с алеутами. Грести умеют только моряк и алеут с левого берега. Как им всем переправиться? (*А. Шаповалов*)

50. Парк разбит прямыми дорожками на равные квадраты со стороной 120 м (см. рисунок, границы парка – тоже дорожки). Саша забыла смартфон в кафе, но думает, что обронила его где-то на дорожке в парке. Они с Гришей хотят «прочесать» все дорожки, то есть побывать во всех их точках. Саша проверяет дорожки со скоростью 60 м/мин, а Гриша – 40 м/мин.



а) Могут ли они выполнить проверку быстрее чем за 22 минуты, если стартуют из одной точки?

б) Какое наименьшее время может занять проверка, если они стартуют из одной точки?

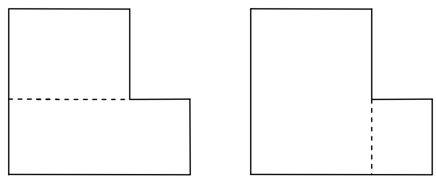
в) Та же задача, но стартовать они могут из разных точек. (*А. Шаповалов*)

51. Дети играли в «Математический квадрат». В каждой клетке квадрата 5×5 есть задача. Стоимость каждой задачи в первом столбце равна 2 баллам, во втором – 4, …, в пятом – 10. За верные ответы ко всем задачам строки или столбца начисляется бонус, равный их суммарной стоимости. Известно, что одна из команд дала верные ответы на все задачи, кроме двух. Какое наименьшее число баллов могла набрать эта команда? (*Ю. Богомолов*)

52. В клетках таблицы 6×8 нужно расставить все натуральные числа от 1 до 48. Каких способов больше: тех, где в крайних клетках ровно семь простых чисел, или тех, где простых чисел на краю ровно восемь? (*А. Шаповалов*)

53. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. В круг встало несколько жителей острова, и каждый заявил: «Ровно один из моих соседей – лжец». Затем все они встали в круг в другом порядке, и более 66% из них заявили: «Оба моих соседа – лжецы». Какое наименьшее число жителей могло стоять в круге? (*А. Шаповалов*)

54. Стороны шестиугольника периметра 200 см идут по линиям клетчатой сетки, сторона клетки равна 1 см. Его можно двумя способами разрезать на два прямоугольника: горизонтальным или вертикальным отрезком (см. рисунок). В обоих случаях периметр одной из частей делится на периметр другой. Длина горизонтального разреза равна 15 см. Найдите все стороны шестиугольника. (*А. Шаповалов*)

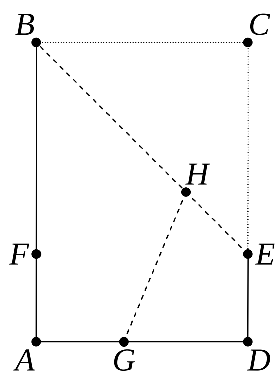


55. На стороне BC квадрата $ABCD$ построили наружу равносторонний треугольник BPC. На прямой AC отметили такую точку Q, что угол BPQ прямой. Докажите, что $BQ = AC$. (*Д. Швецов*)

56. Сколько существует фигур из 15 клеток, каждой из которых можно накрыть две противоположные угловые клетки квадрата 8×8? (*А. Шаповалов*)

57. В треугольнике ABC угол B равен 60°, биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Точки A_0 и C_0 симметричны точке I относительно прямых CB и AB соответственно. Докажите, что если P – точка пересечения прямых A_1C_1 и A_0C_0, то прямые PI и AC параллельны. (*Д. Швецов*)

58. Лист формата А4 перегнули сначала по линии BE так, что точка C совпала с точкой F на стороне AB, а затем по линии GH так, что точка D совпала с F (см. рисунок). Найдите угол BHG. У листа формата А4 отношение сторон равно $1:\sqrt{2}$. (*М. Волчкевич*)



59. На доске 10×10 пьяный король может ходить на одну клетку вправо, вверх или по диагонали вправо-вверх, но не может делать два хода подряд в одном направлении. Он прошёл из левой нижней клетки в правую верхнюю за минимальное возможное для него число ходов. Сколько есть разных таких маршрутов? (*А. Шаповалов*)

60. Пусть a и b – целые числа, причём b не является точным квадратом. Докажите, что уравнение $x^2 + ax + b = y^2$ не может иметь бесконечно много решений в целых числах.

Второй тур

61. На чемпионате Европы по футболу за победу начислялось 3 очка, за ничью – 1, за поражение – 0. После двух туров в одной из групп сложилась такая ситуация:

	Очки	Разница забитых и пропущенных мячей
Швеция	4	+1
Словакия	3	0
Испания	2	Не сохранилась
Польша	1	Не сохранилась

Установите, кто победил в каждом матче и с какой разницей забитых и пропущенных мячей. (*А. Пиперски*)

62. **а**) В 20 пакетах лежит по 25 слив, масса слив в каждом пакете не больше 1 кг. Докажите, что можно переложить сливы в 25 пакетов по 20 слив так, чтобы масса слив в каждом пакете была меньше 1 кг.

б) В 20 пакетах лежит по 26 слив, масса слив в каждом пакете не больше 1 кг. Докажите, что можно переложить сливы в 26 пакетов по 20 слив так, чтобы масса слив в каждом пакете была меньше 1 кг. (*А. Шаповалов*)

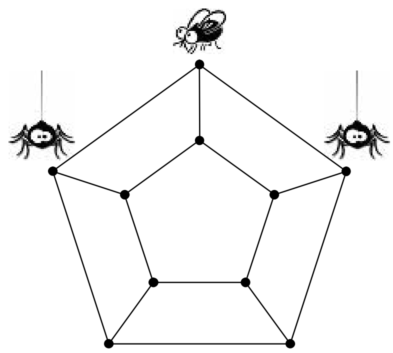
63. На доске написана сумма нескольких слагаемых. Разрешается округлить некоторые из них (возможно, ни одного или все) до ближайшего целого числа, найти полученную сумму и округлить результат до ближайшего целого числа (полуцелые числа округляются в большую сторону). Известно, что так можно получить из исходной суммы как округлённый результат 21, так и 30. Докажите, что из исходной суммы можно получить округлённый результат 26. (*А. Шаповалов*)

64. По кругу десять девочек строго чередуются с десятью мальчиками. Они весят 40 кг, 41 кг, …, 59 кг (в каком-то порядке). Каждый мальчик взял за руку девочку справа.

а) Могут ли девять из образовавшихся пар весить одинаково, а десятая отличаться от них по массе?

б) Девять из образовавшихся пар весят одинаково, а десятая отличается от них по массе. Затем каждый мальчик взял за руку девочку слева (отпустив правую). И снова не все получившиеся пары весят одинаково. Какое наибольшее число пар могут иметь одинаковые массы? (*А. Шаповалов, И. Ященко*)

65. Паутина представляет собой два n-угольника, один внутри другого, соответствующие вершины которых соединены нитями (на рисунке показана паутина для $n = 5$). В один из узлов паутины попалась муха, а в двух соседних с ней узлах того же n-угольника тут же появились два паука. Выбраться из паутины муха уже не может, но может перемещаться в соседние узлы. После каждого такого перемещения пауки тоже переползают в соседние узлы.



а) Смогут ли при $n = 100$ пауки когда-нибудь поймать муху, если та будет стараться спастись?

б) Докажите, что при $n = 2021$ рано или поздно один из пауков сможет поймать муху.

в) При каких n пауки смогут поймать муху, как бы та ни старалась спастись? (*А. Грибалко*)

66. Поверхность куба оклеили в один слой одинаковыми квадратами, в которых проведены обе диагонали (при этом, возможно, перегибая квадраты через рёбра куба и располагая косо). Жучка посадили в одну из вершин куба и разрешили ползать только по диагоналям квадратов. Может ли найтись вершина куба, в которую у жучка не получится добраться? (*А. Шаповалов*)

67. Бабка, внучка, Жучка, кошка и мышка съели у деда на огороде всю репку. Жучка съела треть того, что съела внучка, кошка – вдвое меньше Жучки, мышка – вдвое меньше кошки, а бабка – половину того, что не съела внучка. Какую часть всей репы съела внучка?

68. Фальшивомонетчик напечатал купюры достоинством 43, 57 и 70 рублей, поровну каждого вида. Когда он потратил менее пяти купюр, у него осталось всего 20172 рубля. Сколько и каких купюр было потрачено?

69. Каждую цифру обозначили некоторой буквой. Оказалось, что число ТРИДЕВЯТЬ делится на 27, а число ТРИДЕСЯТЬ делится на 30. Какую цифру обозначает буква С, если буква В обозначает тройку? (*С. Токарев*)

70. В банке сидит несколько (более одного) пауков. Известно, что в каждой их паре хотя бы один обидел другого и каждый паук обидел всех обидчиков своих обидчиков (разумеется, кроме себя).

а) Докажите, что если пауков 13, то каждый из них обидел всех остальных.

б) При каком наименьшем количестве пауков можно утверждать, что каждый обидел всех остальных? (*С. Токарев*)

71. Выписываются строки из девяти различных натуральных делителей числа 9000. Строка должна начинаться с 1, а каждое следующее число в ней должно делиться на предыдущее. Сколько разных строк возможно? (*А. Шаповалов*)

72. Вася получил подарок в закрытой картонной коробке, имеющей форму куба. Каждую минуту он разрезает коробку ножницами от середины какого-то ребра до одной из ближайших вершин. Какое наибольшее время может пройти, прежде чем коробку можно будет открыть? Картон толстый и сгибается только вдоль рёбер. (*М. Евдокимов*)

73. Для какого наибольшего натурального N в записи каждого из чисел N, $2N$, $3N$, …, N^2 последняя цифра не равна предпоследней? (*С. Токарев*)

74. По реке от пристани А до пристани Б туристы проплыли на моторной лодке, а обратно вернулись на катере, который быстрее лодки. Известно, что время путешествия не изменилось бы, если бы скорость течения реки была на 1 км/ч больше. Какая из пристаней расположена выше по течению: А или Б? (*С. Токарев*)

75. Точка M – середина стороны BC остроугольного треугольника ABC. На биссектрисах углов AMB и AMC выбраны точки P и Q соответственно так, что углы BPM и CQM прямые. Докажите, что прямая AM делит отрезок PQ пополам. (*А. Пешнин*)

76. Рассмотрим вписанную и три вневписанные окружности прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C. Для каждой из них через точки её касания с прямыми AC и BC проведена прямая. Докажите, что эти прямые ограничивают квадрат. (*О. Смирнов*)

77. Для любых чисел a, b, c, не равных нулю одновременно, докажите неравенство
$$\frac{2}{3} \le \frac{|a+b|+|b+c|+|c+a|}{|a|+|b|+|c|} \le 2.$$

Третий тур

78. **а**) У Коли есть шесть карточек, на которых написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Он разложил их на столе в ряд числами вниз. Саша может указать любые два набора карточек и спросить у Коли, равны ли произведения чисел на карточках в этих наборах. Как ему за два вопроса узнать, лежат ли карточки в порядке возрастания написанных на них чисел?

б) Та же задача для десяти карточек с числами 1, 2, …, 10 и трёх вопросов.

(*А. Грибалко*)

79. Когда лиса откусила у двух медвежат по одинаковому кусочку сыра, у первого медвежонка осталось втрое меньше сыра, чем у второго. После этого лиса снова откусила у каждого медвежонка точно по такому же кусочку, и у первого осталось вчетверо меньше сыра, чем у второго. Во сколько раз меньше сыра было у первого медвежонка, чем у второго, до прихода лисы?

80. **а**) Саша поставил на вертикальную клетчатую полоску шириной в одну клетку белого короля и несколько чёрных фишек. Затем он стал ходить поочерёдно за белых и за чёрных. Белый король ходит на соседнюю клетку, а если там есть чёрная фишка, съедает её. Чёрные переставляют одну из фишек на любую свободную клетку. Сначала над королём было на 20 чёрных фишек больше, чем под ним, а в конце – на 10 меньше. При этом ни в какой момент фишек над и под королём не было поровну. Какое наименьшее число фишек мог съесть король?

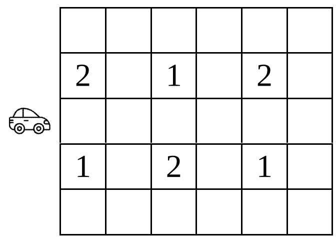
б) Саша поставил на шахматную доску белого короля и несколько чёрных ладей. Затем он стал ходить поочерёдно за белых и за чёрных по шахматным правилам (в частности, не ставил короля под шах и, если ладья делала шах, убирал короля из-под него). Саша следил, чтобы ни в какой момент ладей, стоящих на горизонталях выше и ниже короля, не было поровну. Сначала на горизонталях выше короля было на 20 ладей больше, чем ниже короля, а в конце – на 10 меньше. Ни в начале, ни в конце не было шаха. Какое наименьшее число ладей мог съесть король? (*А. Шаповалов*)

81. Сергей придумывает способы замостить площадку 6×15 м плитками 1×3 м. За каждый новый способ ему платят тысячу рублей. Может ли Сергей заработать хотя бы **а**) один миллион; **б**) семь миллионов рублей? Способы, получающиеся друг из друга поворотами и отражениями, считаются разными. (*А. Шаповалов*)

82. В строку выписано несколько нечётных натуральных чисел. Каждое число, кроме самого левого, получается вычитанием из левого соседа его наибольшей цифры. Какое наибольшее количество чисел может быть в строке? (*А. Шаповалов*)

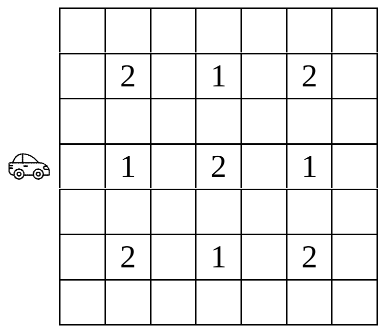
83. Найдите наименьшее n, для которого на доске $n \times n$ можно расставить ферзя, ладью, слона, коня и короля так, чтобы они не били друг друга.

84. **а**) На поле 5×6 стоят светофоры (см. рисунок). В начальный момент светофоры типа 1 горят зелёным, а светофоры типа 2 – красным. Каждую минуту все светофоры меняют свет (с зелёного – на красный, а с красного – на зелёный). Машина может переместиться на соседнюю по стороне клетку за 1 минуту. За какое наименьшее время она сможет, начав в указанном месте, побывать во всех клетках, если на клетки со светофорами можно въезжать, только когда там горит зелёный свет?



б) Та же задача для поля 7×7 (см. рисунок).

(*М. Хачатурян*)



85. За круглым столом сидели пять политиков. Известно, что один из них строго чередует правдивое утверждение с одним ложным, второй – правдивое с двумя ложными, третий – с тремя, четвёртый – с четырьмя, пятый – с пятью. Неизвестно, однако, кто есть кто, и как давно каждый делал правдивое утверждение. «Идёт дождь», – заявил один. «Это неправда», – сказал сосед по часовой стрелке. «Это ты сказал неправду», – заявил его сосед по часовой стрелке. Так, идя по кругу, они делали заявления, каждый раз объявляя неправдой предыдущее утверждение. Наконец, их попросили разойтись. Какое наибольшее число утверждений они могли успеть сделать? (*А. Шаповалов*)

86. После дождичка в четверг на Поле Чудес выросло ветвистое дерево с тремя золотыми монетами. Если вечером его хорошенечко полить, то за ночь на дереве вырастут три золотых, но если забыть это сделать, то за ночь четыре золотых бесследно исчезнут. Если не полить вечером дерево, на котором растёт меньше четырёх золотых, оно погибнет. К 1 апреля на дереве золотилось уже 13 монет. Можно ли точно определить, на какой день недели выпало 1 апреля? (*И. Раскина*)

87. В наборе десять гирь, каждая из которых весит целое число граммов, не превосходящее 130. Докажите, что из набора можно взять несколько гирь и разложить их на чаши весов так, что весы окажутся в равновесии. (*А. Грибалко*)

88. Делитель натурального числа называется собственным, если он больше 1 и меньше этого числа. Маша выписала два наименьших собственных делителя натурального числа, а Боря – два наибольших. Машины числа не делятся друг на друга. Докажите, что сумма Бориных чисел делится на сумму Машиных. (*А. Шаповалов*)

89. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка D. Известно, что $\angle C = 30°$, $\angle BAD = 40°$ и $\angle CAD = 10°$. Докажите, что $AD = BC$.

90. На турнире математических боёв в одной из лиг четыре команды провели однокруговой турнир в три тура. Всего было четыре судьи, каждый бой судили какие-то два из них. Оказалось, что каждый судья судил все команды. Докажите, что для каждой команды есть судья, который судил все её бои. (*А. Заславский*)

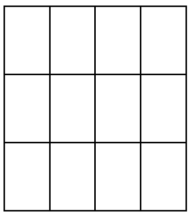
91. Федя согнул лист бумаги по прямой линии, затем согнул по другой прямой ещё раз, а потом проткнул полученную фигуру иголкой. Когда он развернул лист обратно, у него получилось четыре дырки. Докажите, что через все эти дырки Федя может провести либо прямую, либо окружность. (*М. Волчкевич*)

92. Аня написала на доске несколько различных натуральных чисел. Докажите, что Игорь может дописать ещё несколько различных натуральных чисел, не равных Аниным, так, чтобы произведение всех написанных чисел равнялось сумме их квадратов.

93. Все углы n-угольника (не обязательно выпуклого) различны и измеряются целым числом градусов. При этом для каждых двух углов величина одного из них делится на величину другого. При каких n это возможно? (*А. Грибалко*)

94. Пусть P – произвольная точка на дуге AB описанной окружности треугольника ABC, не содержащей точку C. Биссектриса угла APC пересекает биссектрису угла A в точке P_a, а биссектриса угла BPC пересекает биссектрису угла B в точке P_b. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников P_aP_bP лежат на одной прямой. (*Д. Швецов*)

Финал

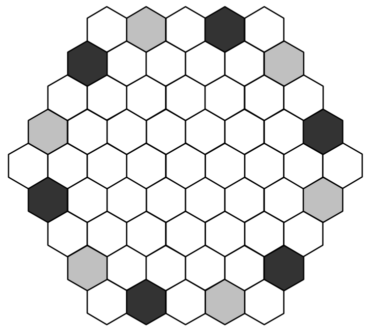


95. Прямоугольник, периметр которого равен 30 см, разрезали на 12 одинаковых прямоугольников, как показано на рисунке. Сумма длин всех разрезов равна 38 см. Чему равен суммарный периметр маленьких прямоугольников?

96. Ася выписывает в ряд в любом порядке все натуральные числа от 1 до 1000, не кратные 25. Затем Настя расставляет в промежутки между числами знаки действий: один знак умножения, а остальные – знаки сложения и вычитания. Настя хочет, чтобы полученное выражение было равно 0, а Ася этого не хочет. Кто из девочек может достичь своей цели, как бы ни действовала другая? (*А. Шаповалов*)

97. На крайних клетках **а**) шахматной доски; **б**) доски 9×9 расставлены белые и чёрные ферзи так, что одноцветные ферзи друг друга не бьют. Каково наибольшее возможное количество ферзей? (*А. Шаповалов*)

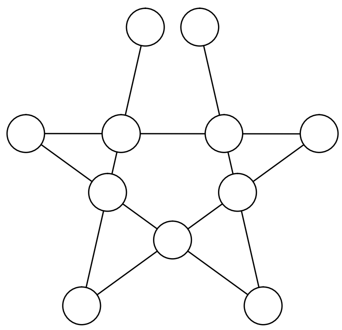
98. В новом районе стали строить человейники в форме куба с ребром длины 20. Квартиры в них представляют собой параллелепипеды $1 \times 1 \times 2$ (возможны и двухэтажные квартиры). Докажите, что число возможных планировок человейника кратно 3.



99. Одинаковые правильные шестиугольники уложены в виде большого «шестиугольника» (см. рисунок). Назовём парой два шестиугольника, имеющих общую сторону. Шестиугольники покрашены в четыре цвета – зелёный, красный, серый и чёрный – таким образом, что каждая пара разноцветна. Известно, что каждый шестиугольник на границе, примыкающий к угловому справа (если смотреть из центра), покрашен в серый цвет, а каждый примыкающий слева – в чёрный. Найдите суммарное количество серо-зелёных и чёрно-красных пар.

100. На столе лежат **а**) 66 камней; **б**) 99 камней; **в**) 100 камней. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. За один ход надо взять себе один или два камня из кучи. Когда все камни разобраны, каждый подсчитывает, сколько у него камней. Выигрывает тот, у кого больше сумма цифр полученного числа (при равенстве – ничья). Каким будет результат при наилучшей игре сторон? (*А. Шаповалов*)

101. На каждой грани куба красными чернилами провели одну или обе диагонали. Оказалось, что при этом не образовалось ни одного треугольника с красными сторонами. Какое наибольшее число диагоналей могло быть проведено? (*М. Евдокимов*)



102. Можно ли вписать в каждый кружок на рисунке по одной цифре так, чтобы на каждой линии была одна цифра 0, одна цифра 1 и две цифры 2? (*Е. Бакаев*)

103. В ряд выставили несколько гирь. Известно, что вторая гиря тяжелее первой, а каждая гиря, начиная с третьей, весит столько же, сколько две предыдущих вместе.

а) Сколькими способами можно уравновесить одну гирю несколькими другими, если всего гирь 100?

б) Обозначим через $K(n)$ количество способов выбрать из первых n гирь несколько штук и разложить их на две чаши весов так, чтобы они оказались в равновесии (способы, различающиеся только порядком чаш, считаются одинаковыми). Докажите, что $K(n) = 2K(n-1) - K(n-4)$ при $n > 4$. (*А. Грибалко*)

104. Саша пишет на доске несколько различных чисел через запятую. Потом Ада красит эти числа в несколько цветов так, чтобы числа каждого цвета образовывали возрастающую или убывающую последовательность. Какое наименьшее количество чисел должен написать Саша, чтобы Аде двух цветов точно не хватило? (*Г. Семёнов*)

105. Суду предъявлено 100 одинаковых на вид монет, среди которых есть фальшивые. Суд знает, что все фальшивые монеты весят одинаково и легче настоящих. Адвокат знает, какие монеты на самом деле фальшивые. Он может проводить взвешивания на чашечных весах без гирь. Однако адвокат связан обязательством не разглашать ни про какую монету, фальшивая она или настоящая: он не имеет права делать взвешивания, из которых такую информацию можно логически вывести.

а) Суду стало известно, что число фальшивых монет равно 22, 66 или 88 . Как адвокату доказать, что их 66, не нарушая обязательств?

б) Суду стало известно, что число фальшивых монет равно 20 или 80. Как адвокату доказать, что их 20, не нарушая обязательств? (*А. Шаповалов*)

106. Найдите минимальный палиндром, больший 2021, который нельзя представить как произведение двух или более палиндромов, отличных от 1. (*А. Шаповалов*)

107. Пятиклассники и шестиклассники сыграли несколько партий в шахматы. Партий между пятиклассниками было 15, а между шестиклассниками – 43. Каждый школьник сыграл на одну партию больше с шестиклассниками, чем с пятиклассниками. Сколько всего школьников играло в шахматы? (*С. Токарев*)

108. Диагонали шестиугольника делят каждый его угол на четыре равные части. Верно ли, что шестиугольник правильный? (*Д. Шноль*)

109. Ежедневно каждый рыцарь короля Артура побеждает ровно одного дракона и отрубает все его головы. Сэр Гавейн специализируется на одноглавых, трёхглавых и семиглавых драконах, а сэр Ланселот – на трёхглавых, пятиглавых и девятиглавых. Всего за июнь Гавейн отрубил 140 драконьих голов, а Ланселот – 200. В конце месяца рыцари заполняют отчёты в виде списка, в котором указываются дата и число голов. Докажите, что вариантов июньского отчёта у Гавейна столько же, сколько у Ланселота. (*А. Шаповалов*)

110. Найдите все положительные числа, которые при зачёркивании одной из цифр их десятичной записи увеличиваются в 4 раза. (*С. Токарев*)

111. Петя сложил две дроби, произведение которых равно 1. Вася утверждает, что какие бы дроби ни складывал Петя, он может разность этих же дробей разложить на два множителя, сумма которых будет такая же, как у Пети. Не ошибается ли Вася? (*А. Блинков*)

112. У Знайки есть бумажный равносторонний треугольник, а у Незнайки – квадрат, причём длины сторон их фигур равны. Знайка вырезает из своей фигуры одинаковые равносторонние треугольники, а Незнайка из своей – квадраты с такой же стороной (оба делают разрезы параллельно сторонам своей фигуры). Незнайка утверждает, что всегда сможет вырезать столько же квадратов, сколько Знайка вырежет треугольников. Прав ли он? (*А. Грибалко*)

113. В треугольнике ABC угол A равен 60°, а угол C равен 90°. Вписанная в него окружность касается сторон AB, BC, CA в точках C_1, A_1, B_1 соответственно, точка H – ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольник A_1HC равносторонний. (*Д. Швецов*)

114. По кругу было выписано 26 чисел. Каждое из них заменили числом равных ему соседей (0, 1 или 2), а затем полученный набор преобразовали аналогичным образом. Докажите, что в последнем наборе сумма всех чисел кратна 4. (*С. Токарев*)

Источник: http://tursavin.ru